государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Самарской области «Пестравский государственный техникум имени Героя Социалистического Труда Анатолия Устиновича Сычёва»

УТВЕРЖДЕНО
Приказ директора
ГБПОУ «ПГТ им. А.У. Сычёва»
от «27» 02 2024г. №21

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по ОУП.03 Математика

по профессии
15.01.05 Сварщик ручной и частично механизированной сварки (наплавки)

с. Пестравка, 2024

Методические рекомендации по выполнению практических работ предназначены для организации работы на практических занятиях по учебному предмету ОУП. 03 Математика, которая является важной составной частью в системе подготовки специалистов среднего профессионального образования.

Методические рекомендации имеют практическую направленность и значимость. Формируемые в процессе практических занятий умения могут быть использованы обучающимися в будущей профессиональной деятельности.

Методические рекомендации предназначены для обучающихся средних профессиональных учебных заведений, изучающих учебному предмету ОУП. 03 Математика могут использоваться на учебных занятиях.

Разработчик: Антипина Людмила Николаевна
ГБПОУ «Пестравский государственный техникум имени Героя Социалистического труда Анатолия Устиновича Сычева»

Пояснительная записка

Методические рекомендации по выполнению практических работ представляют собой часть учебно-методического комплекта по учебному предмету Математика и соответствуют требованиям ФГОС третьего поколения и рабочей программе по предмету.

Целью создания разработки является оказание помощи обучающимся в освоении учебного материала по предмету в учреждениях среднего профессионального образования.

В связи с введением в образовательный процесс нового Федерального государственного образовательного стандарта, который ориентирован на выработку у студентов общих и профессиональных компетенций – набора знаний, умений, навыков и личностных качеств, которые позволят выпускнику стать конкурентоспособным на рынке труда, все более актуальной становится задача организации практической работы студентов.

Практические занятия являются важной формой образовательного процесса и направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений, они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

Необходимыми структурными элементами практического занятия, помимо самостоятельной деятельности обучающихся, являются инструктаж, проводимый преподавателем, а также анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированными умениями. Выполнению практических занятий предшествует проверка знаний студентов - их теоретической готовности к выполнению задания. Практические занятия носят репродуктивный характер. Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), оборудование, аппаратура, материалы и их характеристики, порядок выполнения работы, таблицы, выводы (без формулировки), контрольные вопросы, учебная и специальная литература.

Оценки за выполнение практических работ выставляются по пятибалльной системе и учитываются как показатели текущей успеваемости студентов.

Методическая разработка содержит все структурные элементы для организации и проведения практических занятий. Практические задания представлены разнообразного характера в нескольких вариантах и разной степени сложности. Некоторые содержат устные задания базового уровня («ответить на вопросы»), выполнение которых обязательно, для того чтобы приступить ко второму блоку – решение практических заданий по вариантам. Интересными являются задания - заполни таблицу. Такие задания требуют твердых знаний теоретического материала и определенных вычислительных навыков по теме.

Цель практических занятий:

- помочь обучающимся систематизировать, закрепить и углубить знания теоретического характера;
- научить обучающихся приемам решения практических задач, способствовать овладению навыками и умениями выполнения расчетов, графических и других видов заданий;
- научить их пользоваться справочной литературой и таблицами;
- формировать умение учиться самостоятельно, т. е. овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

В результате проведения практических занятий по дисциплине «Математика» обучающийся должен:

знать:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике;
- широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира;

уметь:

- находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения; выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций;
- вычислять значение функции по заданному значению аргумента; определять основные свойства числовых функций; строить графики изученных функций;
- находить производные элементарных функций; использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков; применять производную для нахождения наибольшего и наименьшего значения;
- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы; использовать графический метод решения уравнений и неравенств;
- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул; вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов;
- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин; описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве; изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач; строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды; вычисление объемов и площадей поверхностей пространственных тел.

Правила выполнения практических работ

1. Обучающийся должен выполнить практическую работу в соответствии с полученным заданием.
2. Каждый обучающийся после выполнения работы должен представить отчет о проделанной работе с анализом полученных результатов и выводом по работе.
3. Все работы следует выполнять в тетрадях для практических занятий.
4. Содержание отчета указано в описании практической работы.
5. Таблицы и рисунки следует выполнять с помощью чертежных инструментов (линейки, циркуля и т. д.) карандашом.
6. Расчет следует проводить с точностью до двух значащих цифр.
7. Если обучающийся не выполнил практическую работу или часть работы, то он может выполнить работу или оставшуюся часть во внеурочное время, согласованное с преподавателем.

Критерии оценивания практической работы

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущены одна существенная ошибка или есть два – три недочѐта в выкладках, рисунках,

чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

- если: допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме; при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

К категории существенных ошибок следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием учащимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой.

К категории несущественных ошибок следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

Перечень практических занятий

Темы и разделы	**Тема практической работы**
	I курс
Раздел 1. Развитие понятия о числе	
Тема 1.1 Развитие понятия о числе	Практическое занятие № 1-2 «Арифметические действия над числами»
Раздел 2. Корни, степени и логарифмы	
Тема 2.1 Корни и степени	Практическое занятие № 3 -4 «Вычисление и сравнение корней»
	Практическое занятие № 5 6 Практическое занятие «Решение иррациональных уравнений»
Тема 2.2 Логарифм. Логарифм числа	Практическое занятие №7 8 «Нахождение значений логарифма по произвольному основанию»
Тема 2.3 Преобразование алгебраических выражений	Практическое занятие № 9 -10«Преобразования выражений, содержащих степени и корни»
	Практическое занятие №6 «Преобразование и вычисление значений логарифмических выражений»
Раздел 3. Прямые и плоскости в пространстве	
Тема 3.1 Взаимное расположение прямых и плоскостей	Практическое занятие № 11 -12 «Взаимное расположение прямых и плоскостей»
	Практическое занятие № 13 -14 «Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах»
	Практическое занятие № 15 -16 «Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей»
Раздел 4. Комбинаторика	
Тема 4.1 Элементы комбинаторики	Практическое занятие №17 -18 «Решение комбинаторных задач»
Раздел 5. Координаты и векторы	
Тема 5.1 Понятие вектора	Практическое занятие № 19 20 «Векторы. Действия с векторами»
	Практическое занятие № 21 -22«Скалярное произведение векторов. Угол между векторами»
Раздел 6. Основы тригонометрии	
Тема 6.1	Практическое занятие № 13 «Радианная и градусная мера измерения

Основные понятия	углов»
Тема 6.2 Основные тригонометрические тождества	Практическое занятие № 23 -24 «Основные тригонометрические тождества, формулы приведения»
Тема 6.3 Преобразования простейших тригонометрических выражений	Практическое занятие №25 26 «Преобразование тригонометрических функций»
Тема 6.4.2 Тригонометрические уравнения и неравенства	Практическое занятие №27 28 «Простейшие тригонометрические уравнения»
	Практическое занятие №29 30 «Решение тригонометрических уравнений»
Раздел 7. Функции, их свойства и графики	
Тема 7.1.1 Функции	Практическое занятие № 31 32 «Преобразование графиков функций»
Тема 7.1.2 Свойства функции	Практическое занятие №19 «Исследование функций»
Тема 7.2 Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции	Практическое занятие № 33 -34 «Показательные уравнения и неравенства»
	Практическое занятие № 35 -36 «Логарифмические уравнения и неравенства»
Раздел 8. Многогранники и круглые тела	
Тема 8.1 Многогранники	Практическое занятие № 37 38 «Многогранники»
Тема 8.2 Тела и поверхности вращения	Практическое занятие № 39 -40 «Цилиндр. Конус».
	Практическое занятие № 41 42 «Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости»
Тема 8.3 Измерения в геометрии	Практическое занятие № 43 44 «Объемы и площади поверхностей многогранников и тел вращения»
Раздел 9. Начала математического анализа	
Тема 9.1 Последовательности	Практическое занятие № 1 «Числовая последовательность, вычисление членов последовательности»
Тема 9.2 Производная	Практическое занятие № 45 -46 «Правила и формулы дифференцирования. Уравнение касательной»
	Практическое занятие № 47 -48 «Исследование функций с помощью производной»
	Практическое занятие № 4 9 -50 «Нахождение наибольшего, наименьшего и экстремальных значений функции»
Раздел 10. Интеграл и его применение	
Тема 10.1 Первообразная и интеграл	Практическое занятие № 5 1 -52 «Вычисление первообразных функций»
	Практическое занятие № 53 54 «Интеграл. Теорема Ньютона-Лейбница»
	Практическое занятие № 7 «Применение интеграла к вычислению физи-

	ческих величин и площадей»
Раздел 11. Элементы теории вероятностей и математической статистики	
Тема 11.1 Элементы теории вероятности	Практическое занятие № 55 56 «Вычисление вероятностей, свойства вероятностей»
Тема 11.2 Элементы математической статистики	Практическое занятие № 57 -58 «Решение задач на расчёт количества выборок»
Раздел 12. Уравнения и неравенства	
Тема 12.1 Уравнения и системы уравнений	Практическое занятие № 50 -60 «Основные приемы решения рациональных и иррациональных уравнений»
	Практическое занятие № 61 -62 «Основные приемы решения показательных и логарифмических уравнений»
	Практическое занятие № 63 64« Основные приемы решения тригонометрических уравнений»
Тема 12.3 Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств	Практическое занятие № 13 «Решение неравенств методом интервалов»

Практическое занятие **№1-2**

«Арифметические действия над числами»

Цель работы.

1. Общение и повторение знаний обучающихся об арифметических действиях над действительными числами, о методах решения квадратных уравнений.

2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности обучающихся.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия по алгебре, микрокалькуляторы.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1. Правила действий над десятичными и обыкновенными дробями.

2. Формулы сокращенного умножения, их применение для преобразования дробно-рациональных выражений.

3. Определение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

4. Повторить правила, формулы и алгоритм решения квадратных уравнений.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Одним из самых основных понятий в математике является число.

Натуральные числа: $N = \{1,2,3,4,\ldots\}$.

Целые числа: $Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$.

Рациональные числа: Q = { m/n, где m – целое число, а n – натуральное}.

Можно также считать, что рациональные числа - это бесконечные периодические десятичные дроби.

Иррациональные числа – это числа, не представимые в виде обыкновенной дроби, т.е. бесконечные непериодические десятичные дроби.

Например: π = 3,1416…, e = 2,7182…; $\sqrt{2}$ =1,4142…

Все эти числа называют действительными числами – R.

Определение модуля числа: $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$

Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$

Основное свойство пропоции: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$

Определение процента: 1% - это 1/100 часть числа.

***Пример*:** Сократить дробь 100/250.

Решение: В соответствии с основным свойством дроби $\frac{100}{250}=\frac{50\cdot 2}{50\cdot 5}=\frac{2}{5}$.

Пример: Вычислите $\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 7$.

Решение:

$$\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 7=\left(\frac{29-15}{35}\right)\cdot 7=\frac{14\cdot 7}{35}=\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}=2{,}8$$

Ответ: 2,8.

Пример: Влажность сухой цементной смеси на складе составляет 18%. Во время перевозки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу привезенной смеси, если со склада было отправлено 400 кг.

Решение: 400 · 0,18 = 72 (кг) - масса влаги в цементе на складе;

400 – 72 = 328 (кг) - масса цемента без влаги (сухого);

328 · 100 : 80 = 410 (кг) - масса привезённой смеси со склада.

Ответ: 410 кг.

Пример: Вычислите |-9,6|+|-7,4|-2.

Решение: На основании определения модуля

|-9,6|+|-7,4|-2 = 9,6 + 7,4 – 2 = 15.

Ответ: 15.

Правила действий над обыкновенными дробями:

$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$; $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

Формулы сокращенного умножения:

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$; $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\pm ab+b^2)$; $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

Формулы дискриминанта и корней квадратного уравнения:

$D=b^2-4ac$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

Варианты практической работы

Вариант 1	**Вариант 2**
1.Найти НОД и НОК чисел:	1. Найти НОД и НОК чисел:
а) 154 и 210; б) 255 и 510	а) 120 и 144; б) 105 и 165
2. Найдите остаток отделения на 3 числа: а) 1 234 321; б) 55 555 155 555	2. Найдите остаток от деления на 9 числа: а) 1 234 567; б) 55 555 155 555
3. Записать в виде десятичной дроби:	3. Записать в виде десятичной дроби:
а) $\frac{6}{25}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $1\frac{1}{2}$	а) $\frac{7}{20}$; б) $1\frac{3}{8}$; в) $4\frac{8}{28}$.
4. Упростите выражение: $\frac{x^2-4x}{y}\cdot\frac{2xy}{x^2-16}$	4. Упростите выражение: $\frac{x^2-x}{2y}\cdot\frac{y}{x-1}$
5. Решить уравнение: $2x^2-9x+10=0$.	5. Решить уравнение: $5x^2+14x-3=0$

Практическое занятие **№ 3 -4**

«Вычисление и сравнение корней»

Цель работы.

1. Обобщение и корректировка знаний о свойствах корней и действиях с корнями, умения преобразования корней по данной теме.
2. Выработать навыки применения теоретических знаний на практике.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия по алгебре, микрокалькуляторы.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1. Свойства степеней.
2. Определение корня n-й степени, свойства корней.
3. Преобразование и сравнение радикалов.

2. Выполнение практической работы

Задание для всех вариантов

1.Ответьте на вопросы:

1. Сформулируйте свойства возведения в степень с натуральным показателем.
2. Сформулируйте свойства извлечения корня из числа.
3. Как определяется степень числа с рациональным показателем? Чему равно $a^{\frac{p}{q}}$
4. Дайте определение степени числа *а* с целым отрицательным показателем.
5. Как выполняется операция извлечения корня из корня?

Теоретические сведения и методические рекомендации

Действия с числами

С множествами натуральных, целых и рациональных чисел можно производить операции сложения, умножения и деления. Рассмотрим операции *возведение в степень и извлечение корня.*

$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n$ Выражение называется степенью числа а. При этом а – называется основанием степени, а n – показателем степени.

***Свойства степени с рациональным показателем*:**

1) $a^1 = a;$
2) $a^0 = 1 \ (a \neq 0);$
3) $a^m : a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0);$
4) $(a^m)^n = a^{mn};$
5) $a^n b^n = (ab)^n;$
6) $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n \ (b \neq 0);$
7) $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0);$
8) $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n \ (a,b \neq 0)$
9) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0.$

Если $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. n – натуральное число, m – целое ~~чи~~сло и частное является целым числом, то при a> 0 справедливо равенство .

Определение. Корнем n – й степени из действительного числа а (n – натуральное число) называют такое действительное число х, при возведении которого в степень n получается число а.

Это число обозначают: $\sqrt[n]{a} = x$, где $x^n = a$.

a-подкоренное выражение, n-показатель корня.

Неотрицательное значение корня n –й степени из неотрицательного числа называется арифметическим.

Арифметическим корнем натуральной степени n≥2 из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n- я степень которого равна a.

Операция извлечения корня является обратной по отношению к возведению в соответствующую степень. $5^2 = 25$ $10^3 = 1000$ $0,3^4 = 0,0081$ √ = 5 3 4. Иногда выражение√ называют радикалом от латинского слова radix – «корень». Корень чётной степени имеет смысл (т.е. определён) только для неотрицательного подкоренного выражения; корень нечётной степени имеет смысл для любого подкоренного выражения.

Сложение и вычитание корней. Чтобы произвести сложение и вычитание корней, сначала корни приводят к простейшему виду, а затем выполняют приведение подобных членов.

Пример 1.

$$5\sqrt{125} - \sqrt{48} + \sqrt{75} - 2\sqrt{125} + 3\sqrt{12} - \sqrt{245} =$$
$$5\sqrt{25\cdot 5} - \sqrt{16\cdot 3} + \sqrt{25\cdot 3} - 2\sqrt{25\cdot 5} + 3\sqrt{4\cdot 3} - \sqrt{49\cdot 5} =$$
$$25\sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 10\sqrt{5} + 6\sqrt{3} - 7\sqrt{5} = 7\sqrt{3} + 8\sqrt{5}.$$

Умножение и деление корней.

Произведение корней с одинаковыми показателями равно корню той же степени из произведения подкоренных выражений. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Частное от деления корней с одинаковыми показателями равно корню той же степени из частного от деления подкоренных выражений. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Если показатели корней различны, то сначала нужно привести их к общему показателю, а затем произвести умножение и деление.

Если корни имеют коэффициенты, то их перемножают или делят отдельно и результат пишут перед общим корнем.

Свойства корня n-ой степени
(для $n \in N,\ k \in N,\ n > 1,\ k > 1$)

1° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$, где $a \ge 0,\ b \ge 0$

2° $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $a \ge 0,\ b > 0$

3° $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, где $a \ge 0$

4° $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, где $a \ge 0$

5° $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$, где $a \ge 0$

6° $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n - \text{четно} \\ a, & n - \text{нечетно} \end{cases}$

7° $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, $n - \text{нечетно}$

8° $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$, где $a \ge 0$

Примеры применения свойств арифметического корня.

1. $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27\cdot 3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
2. $\sqrt[3]{\dfrac{256}{625}} : \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{256}{625} : \dfrac{4}{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{4}{5}$
3. $\sqrt[7]{5^{21}} = \sqrt[7]{\left(5^3\right)^7} = 5^3 = 125$
4. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$

5. $\left(\sqrt[4]{9}\right)^{-2} = \sqrt[4]{9^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$

Возведение корней в степень. При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, а показатель степени оставить без изменения. Если корень имеет коэффициент, то его отдельно возводят в эту степень и результат возведения записывают как коэффициент при самом корне.

Пример: $\left(\sqrt[5]{a^2b^{-3}}\right)^3 = \sqrt[5]{a^6b^{-9}} = ab^{-1}\sqrt[5]{ab^{-4}} = \frac{a}{b}\sqrt[5]{\frac{ab}{b^4b}} = \frac{a}{b^2}\sqrt[5]{ab}$

Избавление от иррациональности в знаменателе дроби. Для этого нужно знаменатель и числитель дроби умножить на такое выражение, которое в произведении со знаменателем дает рациональное выражение в знаменателе.

Пример: $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{6-2} = \frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}$

Извлечение корня из корня. При извлечении корня из под корня показатели корней перемножают, а подкоренное выражение оставляют без изменения. Если корень имеет коэффициент, то обычно до извлечения из данного корня нового корня вводят коэффициент под знак радикала данного корня.

Пример:

$$\sqrt[3]{3x\sqrt[4]{x^2y^3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4\cdot x^4\cdot x^2\cdot y^3}} = \sqrt[12]{81x^6\cdot y^3}$$

$$\sqrt[7]{ax^4\sqrt[3]{\frac{bn^2}{a^2x^2}}} = \sqrt[21]{\left(ax^4\right)^3\frac{bn^2}{a^2x^2}} = \sqrt[21]{\frac{a^3x^{12}bn^2}{a^2x^2}} = \sqrt[21]{ax^{10}bn^2}$$

Для вычисления корней используем таблицу степеней.

Таблица степеней

a^n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249
8	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401
10	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000
11	11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881	2357947691	25937424601
12	12	144	1728	20736	248832	2985984	35831808	429981696	5159780352	61917364224

Варианты практической работы

Вариант 1	Вариант 2
1. Найдите значение выражения:	
а) $\sqrt[3]{-27}$ б) $\left(5^{-3}\cdot\frac{1}{64}\right)^{\frac{-1}{3}}$	а) $\sqrt[4]{625}$ б) $\left(\frac{1}{16}\cdot 81^{-1}\right)^{\frac{-1}{4}}$
2. Вычислите:	
а) $\sqrt[3]{1000\cdot 27\cdot 8}$; б) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; в) $\sqrt[5]{0{,}4^5\cdot 5^5}$; г) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$.	а) $\sqrt[3]{64\cdot 125\cdot 729}$; б) $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$; в) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot 12^6}$; г) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$
3. Решите уравнение:	
$x^4 = 16$	$x^3 = 125$
4. Упростите выражение:	
$\frac{x^{\frac{-2}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{5}}}$	$\frac{\left(c^{\frac{-2}{3}}\right)^{-4}}{c^{\frac{1}{6}}\cdot c^{\frac{1}{2}}}$
5. Сравните:	
$\sqrt[7]{128}$ или $\sqrt[5]{4}$	$\sqrt[3]{26}$ или $\sqrt[4]{5}$
6. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:	
$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Практическое занятие **№ 5 -6**

«Решение иррациональных уравнений»

Цель работы:

Формирование навыка решения иррациональных уравнений.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия по алгебре, микро-калькуляторы.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1. Изучить алгоритм решения иррациональных уравнений.
2. По образцу выполнить тренировочные задания.

2. Выполнение практической работы

ПАМЯТКА

При решении иррациональных уравнений следует учитывать, что:

1) подкоренное выражение корня ***четной*** степени должно быть **неотрицательным** и значение корня неотрицательно;
2) все корни ***нечетной*** степени определены при **любом** действительном значении подкоренного выражения;
3) используются два основных метода – возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень и введение новой переменной;
4) при возведении обеих частей уравнения в четную степень ***возможно*** появление посторонних корней, поэтому проверка является составной частью решения.

Тренировочные упражнения

Пример 1. Решите уравнение: $\sqrt{x-2}=4$.

Возведем обе части в квадрат $(\sqrt{x-2})^2 = 4^2$, x -2 =16, x =18

Ответ: 18.

Пример 2. Решите уравнение: $\sqrt{5-x} = \sqrt{x-2}$

Возведем обе части в квадрат $(\sqrt{5-x})^2 = (\sqrt{x-2})^2$, $5 - x = x - 2$, $x = 3{,}5$

Ответ: 3,5.

Пример 3. Решите уравнение: $\sqrt{x+1} = 1 - x$

Возведем обе части в квадрат $(\sqrt{x+1})^2 = (1-x)^2$, $x + 1 = 1 - 2x + x^2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

Проверка показывает, что $x_2 = 3$ – посторонний корень.

Ответ: 0.

Пример 4. Решите уравнение: $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2$

Уединим радикалы и затем возведем обе части в квадрат $(\sqrt{x+2})^2 = (2 + \sqrt{x-6})^2$

$x + 2 = 4 + 4\sqrt{x-6} + x - 6$, $4\sqrt{x-6} = 4$

Уединим радикал и возведем опять обе части в квадрат, получаем $x = 7$.

Ответ: 7.

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt{x+16} - x + 4 = 0$.

Решение. Уединим радикал и затем возведем обе части в квадрат

$$\left(\sqrt{x+16}\right)^2 = (x-4)^2, \quad x + 16 = x^2 - 8x + 16,$$

$$x^2 - 9x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 9.$$

Проверка показывает, что $x_1 = 0$ – посторонний корень.

Ответ: 9.

Пример 6. Решите уравнение $x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0$.

Решение. *Введем новую переменную* $t = \sqrt{x^2 + 3x - 6}$, $t \ge 0$. Тогда $x^2 + 3x = t^2 + 6$ и уравнение примет вид $t^2 + 6 - 18 + 4t = 0$, $t^2 + 4t - 12 = 0$, $t_1 = 2$

или $t_2 = -6$ - не подходит по смыслу.

Далее $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2$, $x^2 + 3x - 6 = 4$, $x^2 + 3x - 10 = 0$, $x_1 = -5$, $x_2 = 2$.

Ответ: - 5; 2.

Варианты практической работы

Вариант 1	**Вариант 2**
Решите уравнения:	
а) $\sqrt{1-x} = 3$	а) $\sqrt{x-2} = 4$
б) $\sqrt{x+2} = \sqrt{3-x}$	б) $\sqrt{5-x} = \sqrt{x-2}$
в) $\sqrt{1-x} = x + 1$	в) $\sqrt{2x-1} = x - 2$
г) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+6} = 1$	г) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$
д) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{11x+1} = \sqrt{7x+4}$	д) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$

Практическое занятие **№ 7 -8**

«Нахождение значений логарифма по произвольному основанию»

Цель работы:

Формирование умения применять основное логарифмическое тождество и свойства логарифмов для преобразования и вычисления значений логарифмических выражений.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия по алгебре, микрокалькуляторы.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1. Ответить на контрольные вопросы:

а) Дайте определение логарифма числа.

б) Запишите основное логарифмическое тождество.

в) Перечислите основные свойства логарифмов.

2. По образцу выполнить тренировочные задания.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение: Логарифмом числа b по основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b, при условии $b>0$, $a>0$, $a\neq 1$. Обозначается символом $loq_a в$.

Определение логарифма можно записать так $a^{\log_a b} = b$. Его называют основным логарифмическим тождеством.

Особо выделим три формулы: $loq_a 1 = 0,\ loq_a a = 1,\ loq_a a^c = c$

Свойства логарифмов

1. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
2. $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
3. $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$
4. $\log_{a^p} b = \dfrac{1}{p} \cdot \log_a b$ Формула перехода к другому основанию: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Вычисление значения выражений

Пример№1.

Вычислить $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50.$

▶ Применяя формулы (1) — (3), находим

$$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \frac{\sqrt{3}\cdot 50}{\sqrt{12}} =$$

$$= \log_5 25 = 2. \ \triangleleft$$

Пример№2. Вычислите. а) $lq0{,}01$, б) $loq_{\frac{1}{4}}64$, в) $loq_2\frac{1}{16}$, г) $loq_6 12 + loq_6 3$

д) $loq_{\frac{2}{3}}32 - loq_{\frac{2}{3}}243$

Решение: а) $lq0{,}01 = lq10^{-2} = -2$;

б) $loq_{\frac{1}{4}}64 = loq_{\frac{1}{4}}4^3 = loq_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = -3$;

в) $loq_2\frac{1}{16} = loq_2(2)^{-4} = -4$;

г) $loq_6 12 + loq_6 3 = loq_6(12\cdot 3) = loq_6 36 = loq_6 6^2 = 2$;

д) $loq_{\frac{2}{3}}32 - loq_{\frac{2}{3}}243 = l$
$oq_{\frac{2}{3}}\frac{32}{243} = loq_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 5.$

1) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 36 = 2;$

2) $\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1;$

3) $\log_3 3^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}\log_3 3 = \frac{1}{7}.$

Варианты практической работы

Вариант 1	Вариант 2
Вычислите:	
1) $\log_2\frac{1}{8} + \log_4 64 + \lg 100$	1) $\log_4\frac{1}{64} + \log_3 81 + \lg 0{,}1$
2) $\log_2 4 \cdot \log_3 27 : \log_2\frac{1}{64}$	2) $\log_5 125 : \log_4 16 \cdot \log_{0,5}\frac{1}{32}$
3) $\log_2 \log_7 49$	3) $\log_{\frac{1}{27}} \log_5 125$
4) $\log_3 7 - \log_3\frac{7}{9}$	4) $\log_6 12 + \log_6 3$
5) $\log_5 22 - \log_5 11 - \log_5 10$	5) $\log_2 15 - \log_2 30$
6) $2^{2\log_2 10}$	6) $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$
7) $\log_6 2 + \log_6 3$	7) $6^{3\log_6 4}$
8) $3^{2+\log_3 2}$	8) $2^{1+\log_2 9}$
9) $3\lg 2 - \lg 8$	9) $2\lg 5 - \lg 25$
10) $2\log_7 32 - \log_7 256 - 2\log_7 14$	10) $2\log_3 135 - \log_3 20 - 2\log_3 6$
11) $16^{\log_4 10}$	11) $16^{\log_2 3}$
12) $\frac{\log_7 25}{\log_7 5}$	12) $\frac{\log_5 49}{\log_5 7}$

Практическое занятие **№ 9 -10**

«Преобразования выражений, содержащих степени и корни»

Цель работы:

Обобщение и систематизация навыков и умений выполнения тожественных преобразований над выражениями, содержащими степени и корни, используя изученные свойства и методы.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия по алгебре, микро-калькуляторы.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1. Свойства степени с рациональным показателем.
2. Определение корня n-й степени, свойства корней.
3. Перевод дробных показателей в радикалы и наоборот.
4. Преобразование и сравнение радикалов.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение. Если n – натуральное число, m – целое число и частное $-\frac{m}{n}$ является целым числом, то при а > 0 справедливо равенство $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Пример 1. $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8$

Свойства

Для любых рациональных чисел p и q и $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$
3. $(a^p)^q = a^{p\cdot q}$

4. $(ab)^{p} = a^{p} \cdot a^{q}$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{p} = \dfrac{a^{p}}{b^{p}}$

6. Если $a \neq 0$, то $a^{0} = 1$

Пример 2.

$$8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} - 16:16^{\frac{3}{4}} + \left(9^{\frac{1}{7}}\right)^{\frac{7}{2}} = 8^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{1}{4}} + 9^{\frac{1}{2}} = (2^{3})^{\frac{2}{3}} - \left(2^{4}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(3^{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{2} - 2 + 3 = 4 - 2 + 3 = 5$$

Пример3

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^{3}} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^{3} = 8;$$

$$7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^{5}} = \sqrt[4]{7^{4} \cdot 7} = 7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{3^{-6}} = \sqrt[3]{(3^{-2})^{3}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Пример 4.

1) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 7;$

2) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$

3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^{4})^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^{3} = 8;$

4) $24^{\frac{2}{3}} = (2^{3} \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^{2}} = 4\sqrt[3]{9};$

5) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{(2^{3})^{\frac{1}{3}}}{(3^{3})^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{2}{3}.$

Пример 5.

Упростить выражение $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab. \quad \triangleleft$$

Пример 6. **Упростить выражение** $\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}}.$

$$\frac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}} = \frac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{\sqrt{5}-3+4-\sqrt{5}}} = \frac{a^{2}}{a} = a$$

ТРЕНИРОВОЧНАЯ ТАБЛИЦА

Вычислите:

8	$\left(\sqrt{32}\right)^{\frac{2}{5}}$	$4^{-\frac{3}{2}}$	$64^{\frac{5}{6}}$	$32^{-\frac{3}{5}}$	$\left(\sqrt{27}\right)^{\frac{2}{3}}$	$32^{\frac{4}{5}}$	$\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}}$	$16^{-\frac{3}{4}}$

7	$32^{-\frac{3}{5}}$	$\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$125^{-\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$	$16^{-\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$81^{-\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$
6	$16^{\frac{1}{4}}$	$64^{\frac{1}{2}}$	$8^{\frac{1}{3}}$	$32^{\frac{1}{5}}$	$27^{\frac{1}{3}}$	$81^{\frac{1}{4}}$	$64^{\frac{1}{3}}$	$25^{\frac{1}{2}}$
5	$(\sqrt{7})^2$	$(\sqrt{2})^8$	$(\sqrt{5})^4$	$(\sqrt{2})^{10}$	$(\sqrt{6})^4$	$(\sqrt{2})^6$	$(\sqrt{3})^4$	$(\sqrt{5})^0$
4	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
3	6^{-2}	2^{-4}	3^{-3}	5^{-1}	3^{-4}	2^{-3}	7^{-2}	4^{-1}
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^1$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2$
1	3^4	4^3	2^4	5^3	2^5	3^3	5^0	2^3
	a	b	c	d	e	f	g	h

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Вычислить: а) $27^{\frac{2}{3}}$; б) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; в) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$; г) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$

2. Представить в виде степени с рациональным показателем: а) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; б) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$.

3. Вычислить: а) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^6}$; б) $\sqrt[10]{4^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} + \sqrt[4]{18} \cdot \sqrt[4]{4\frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{256}}$;

г) $\sqrt[4]{17 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17 + \sqrt{33}}$.

4. Сравнить числа: а) $2^{\sqrt{3}}$ или $2^{1,7}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,7}$.

5. Упростить выражение: а) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2 b}}\right)^6$; б) $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}\right)^6$ в) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$.

Вариант 2

1. Вычислить: а) $81^{\frac{3}{4}}$; б) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$; в) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$; г) $\dfrac{25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}{625 \cdot 5^{-3}}$.

2. Представить в виде степени с рациональным показателем: а) $b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{b}$; б) $b^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{b}$.

3. Вычислить: а) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}}$; б) $\sqrt[4]{3^{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8}$; в) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt{\sqrt[3]{64}}$; г) $\left(\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) : \sqrt[3]{2}$.

4. Сравнить числа: а) $3^{1,4}$ или $3^{\sqrt{2}}$ б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

5. Упростить выражение: а) $\left(\sqrt[3]{y^2}\right)^3$; б) $\left(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^3}\right)^{12}$; в) $\dfrac{b^{\frac{4}{3}}\left(b^{-\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{b^{\frac{1}{4}}\left(b^{\frac{3}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)}$.

Практическое занятие №6

«Преобразование и вычисление значений логарифмических выражений»

Цель работы:

Обобщение способов выполнения тождественных преобразований и вычисление значений логарифмических выражений

Оборудование: инструкционно-технологические карты, справочные пособия по алгебре, микрокалькуляторы.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Определение логарифма числа.
2) Свойства логарифмов.
3) Определение десятичного логарифма.
4) Определение натурального логарифма.

2. Выполнение практической работы

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Вычислить: а) $9^{2\log_3 12}$; б) $\log_9 15+\log_9 18-\log_9 10$; в) $\dfrac{\log_2 4+\log_2\sqrt{10}}{\log_2 20-3\log_2 2}$;

г) $2^{3+\log_2 9}$; д) $\lg 0,0001$.

2. Найдите значение выражения: а) $\log_{\frac{1}{2}}16\cdot\log_5\dfrac{\sqrt[5]{5}}{25}:3^{\log_3 2}$; б) $\dfrac{\log_2 24-\frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18-\frac{1}{3}\log_3 72}$.

3. Найдите значение логарифма $\log_3 8$, если $\log_3 2=c$.

4. Упростить: $-\log_5\log_5\sqrt[5]{\sqrt[5]{5}}$.

5. Найдите x, если $log_3 x=2log_3 7+\dfrac{2}{3}log_3 27-\dfrac{3}{2}log_3 16$.

Вариант 2

1. Вычислить: а) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}}2}$; б) $\log_8 12-\log_8 15+\log_8 20$; в) $\dfrac{3\log_7 2-\frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2+\frac{1}{3}\log_5 27}$;

г) $\dfrac{1}{6}^{2+\log_{\frac{1}{6}}20}$; д) $\log_{0,1}0,001$.

2. Найдите значение выражения: а) $\log_{\frac{1}{2}}9\cdot\log_2\dfrac{\sqrt[3]{2}}{8}:7^{2\log_7 2}$; б) $\dfrac{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}$.

3. Найдите значение логарифма $\log_6 24$, если $\log_6 4=m$.

4. Упростить: $-\log_3\log_3\sqrt[5]{\sqrt[5]{3}}$.

5. Найдите x, если $log_2 x = 2log_2 5 - \frac{1}{3} log_2 8 + log_2 0{,}2$.

Практическое занятие **№ 11 -12**

«Взаимное расположение прямых и плоскостей»

Цель работы:

Формирование пространственного воображения; применение признаков параллельности и перпендикулярности прямых при решении геометрических задач.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, плакаты по геометрии, чертежные инструменты.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Основные понятия и аксиомы стереометрии.
2) Скрещивающиеся, параллельные и перпендикулярные прямые.
3) Угол между прямыми в пространстве.
4) Параллельность прямой и плоскости.
5) Перпендикулярность прямой и плоскости.
6) Угол между прямой и плоскостью.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве.

Основные фигуры в пространстве - точка, прямая и плоскость.

Аксиома 1. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

Аксиома 2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Аксиома 3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Теорема: Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.

Теорема: Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

Теорема: Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

Определение. Две прямые в пространстве называются ***параллельными,*** если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Определение. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости называются ***скрещивающимися.***

Определение. Две прямые в пространстве называются ***перпендикулярными,*** если они пересекаются под прямым углом.

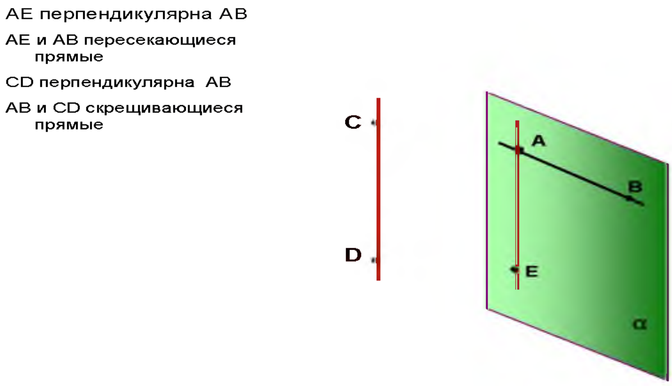
Плоскость можно провести:

- через две пересекающиеся прямые;
- через прямую и не лежащую на ней точку;
- через три точки, не лежащие на одной прямой;
- через две параллельные прямые.

Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Определение. Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения данной прямой и плоскости.

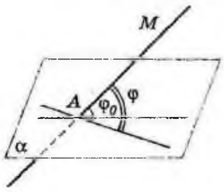


Обратить внимание на то, что в пространстве перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися и скрещивающимися.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Вертикальные углы равны, а смежные углы дополняют друг друга до 180°.

Угловая мера меньшего из углов называется углом между прямыми. Угол между перпендикулярными прямыми равен 90°. Угол между параллельными прямыми равен 0°.

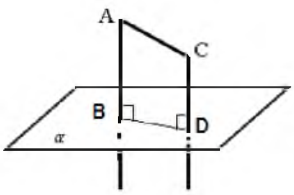


Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

__**Задача 1**__

Две прямые образуют прямой угол с плоскостью α. Длина отрезка AB= 59,5 см, длина отрезка CD= 38,5 см. Найдите длину AC, если BD=20 см.



Свойства перпендикулярности прямой и плоскости.

Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Стереометрия - это раздел геометрии, изучающий свойства ….

1) прямых в пространстве

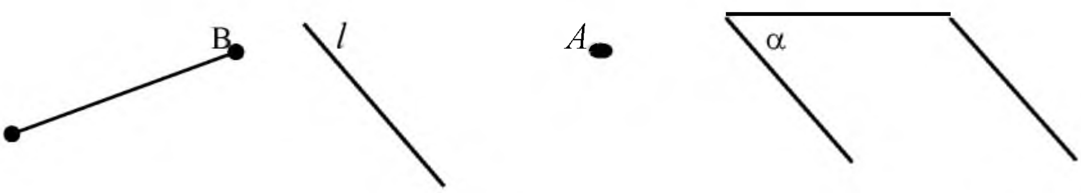
2) фигур в пространстве

3) фигур на плоскости

4) плоскостей в пространстве

2. Какие из фигур являются основными в пространстве?

1) отрезок 2) прямая 3) точка 4) плоскость

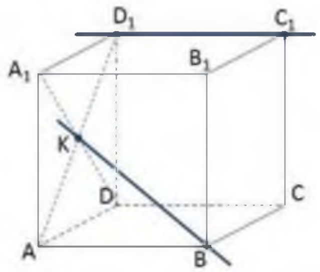


A

3. Изобразите плоскость α, точки *E, F*, принадлежащие ей, и точку *A*, ей не принадлежащую. Сделайте необходимые записи.

4. Изобразите прямую *a*, лежащую в плоскости α. Сделайте необходимую запись.

5. На рисунке изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



1) Определите взаимное расположение прямых BK и C_1D_1.
  а) пересекаются б) параллельны в) скрещиваются

2) В плоскости ABCD найдите прямые, параллельные прямой A_1B_1.

3) Найдите градусную меру угла между прямыми A_1 D_1 и BD.

4) Укажите плоскости, перпендикулярные прямой AB.

6. Точка С лежит на отрезке АВ. Через точку А проведена плоскость, а через точки В и С – параллельные прямые, пересекающие эту плоскость в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если АС : СВ = 3 : 2 и BB_1= 20 см.

7. Через вершину А квадрата ABCD проведена прямая AM, перпендикулярная плоскости ABCD. Найдите расстояния от точки М до вершин квадрата, если ВС = 12 см и
AM = 5 см.

Вариант 2

1. Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве, называется……

1) планиметрия

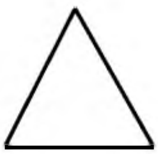
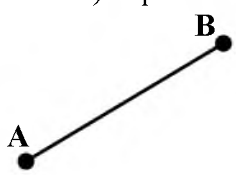
2) видеометрия

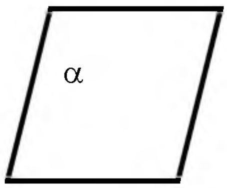
3) стереометрия

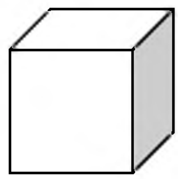
4) геометрия

2. Какие из фигур не являются основными в пространстве?

1) треугольник 2) отрезок 3) плоскость 4) куб

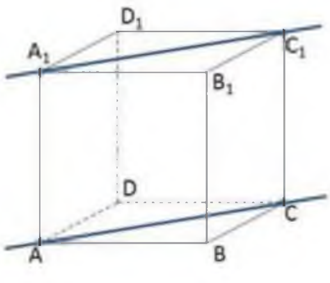







3. . Изобразите плоскость α, не принадлежащие ей точки *K, L* и принадлежащую ей точку *M*. Сделайте необходимые записи.

4. Изобразите прямую *b*, пересекающую плоскость α в точке *O*. Сделайте необходимую запись.



5. На рисунке изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Определите взаимное расположение прямых AC и A_1C_1.
  а) пересекаются б) параллельны в) скрещиваются

2) В плоскости ABCD найдите прямые, параллельные прямой B_1C_1.

3) Найдите градусную меру угла между прямыми A_1C_1 и BD.

4) Укажите плоскости, перпендикулярные прямой AD.

6. Точка С лежит на отрезке АВ. Через точку А проведена плоскость, а через точки В и С – параллельные прямые, пересекающие эту плоскость в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если АС : СВ = 4 : 3 и BB_1= 14 см.

7. Через вершину А квадрата ABCD проведена прямая AM, перпендикулярная плоскости ABCD. Найдите расстояния от точки М до вершин квадрата, если ВС = 8 см и
AM = 15 см.

Практическое занятие **№ 13 -14**

«Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах»

Цель работы:

Формирование пространственного воображения; систематизация знаний по данной теме при решении геометрических задач.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, плакаты по геометрии, чертежные инструменты.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Перпендикулярные прямые.
2) Перпендикулярность прямой и плоскости.
3) Перпендикуляр к плоскости, наклонная и ее проекция.
4) Теорема о трех перпендикулярах.

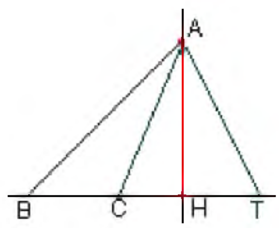
2. Выполнение практической работы

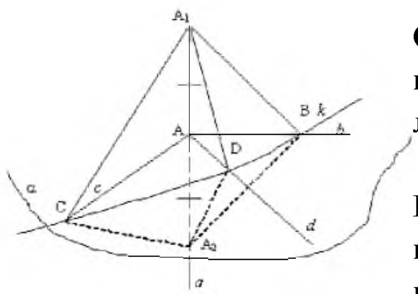
Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение. Перпендикулярными называются прямые, которые пересекаются под прямым углом.

Определение. Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной к данной.

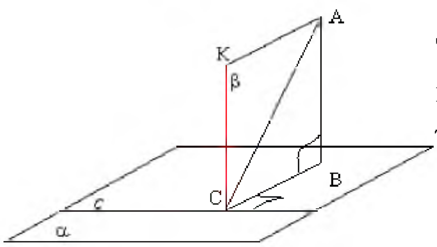
Определение. Наклонной, проведенной из данной точки к данной прямой (плоскости), называется отрезок, соединяющий данную точку с любой точкой прямой (плоскости), не являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из этой же точки на данную прямую (плоскость).





Определение. Прямая называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.



Теорема о трех перпендикулярах. Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна и наклонной.

AB - перпендикуляр, AC - наклонная

HM – проекция наклонной на данную плоскость

c - прямая, проходящая через основание наклонной

Варианты практической работы

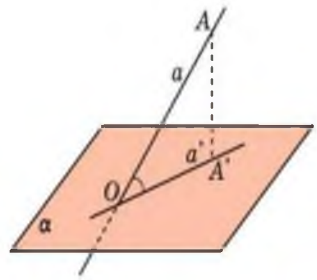
Вариант 1

1. Выберите верное утверждение:

1) Прямую, перпендикулярную любой прямой в плоскости, называют...
а) наклонной к плоскости; б) перпендикуляром к плоскости; в) секущей; г) лучом.

2) Наклонной к плоскости называют прямую, пересекающую плоскость и ...
а) не пересекающую перпендикуляр; б) лежащую в ней;
в) не имеющую с ней общих точек; г) не перпендикулярную ей.

3) Прямая, проходящая через основания перпендикуляра и наклонной, называется ...
а) секущей; б) параллельной плоскости; в) проекцией наклонной на плоскость;



г) перпендикуляром к плоскости.

4) Назовите по рисунку: а) наклонную; б) основание наклонной; в) проекцию; г) перпендикуляр; д) основание перпендикуляра.

2. Прямые AB, AC, AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если AB=3см, BC=7см, AD=1,5 см.

3. Длина наклонной 18 см. Угол между наклонной и плоскостью 30°. Чему равна длина проекции наклонной на эту плоскость?

4. Наклонная AD с плоскостью α образует угол 30°, а наклонная DC с плоскостью α образует угол 45°. Длина перпендикуляра DB равна 11 см. Вычисли длины обеих наклонных.

Вариант 2

1. Выберите верное утверждение:

1) Если из точки вне плоскости провести к ней перпендикуляр и наклонные, то ...

а) перпендикуляр длиннее наклонной; б) наклонная длиннее перпендикуляра;

в) проекция наклонной короче перпендикуляра; г) наклонная и ее проекция равны.

2) Углом между прямой и плоскостью называют...

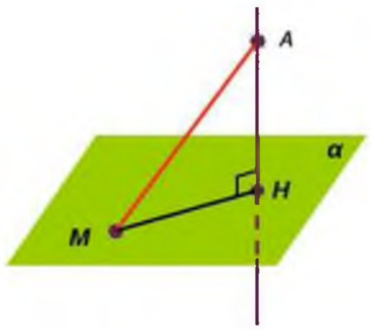
а) угол между наклонной и перпендикуляром; б) угол между проекцией и перпендикуляром;

в) угол между наклонной и ее проекцией; г) угол между наклонной и прямой в плоскости.

3) Через ... проходит единственная плоскость,

а) две точки; б) три параллельные прямые; в) четыре точки;

г) три попарно пересекающиеся прямые.



4) Назовите по рисунку: а) перпендикуляр; б) проекцию;
в) основание наклонной; г) наклонную;
д) основание перпендикуляра.

2. Прямые AB, AC, AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если AD=9 см, BC=16 см, AD=5 см.

3. Из точки B проведена наклонная BC = 15 см. Ее проекция MC = 9 см. Найти длину перпендикуляра MB.

4. Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведены к этой плоскости две наклонные AB и AC, длины которых равны18 см и $2\sqrt{109}$ см. Их проекции на эту плоскость относятся как 3:4. Найдите расстояние от точки A до плоскости α.

Практическое занятие **№ 15- 16**

«Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей»

Цель работы:

Формирование пространственного воображения; систематизация знаний по данной теме при решении геометрических задач.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, плакаты по геометрии, чертежные инструменты.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Параллельность плоскостей, прямой и плоскости

2) Двугранный угол, линейный угол двугранного угла.

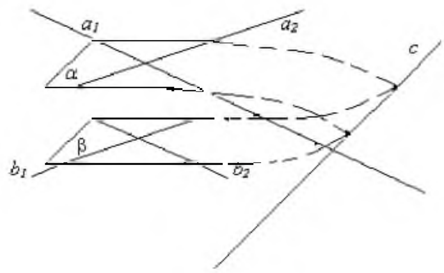
3) Перпендикулярные плоскости.

4) Расстояние.
5) Параллельное проектирование.

2. Выполнение практической работы

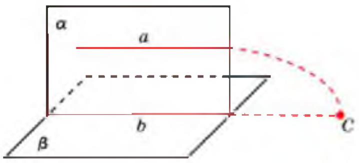
Теоретические сведения и методические рекомендации

Параллельность плоскостей



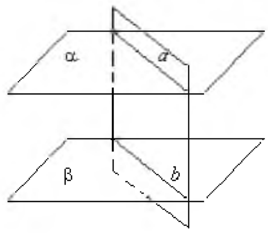
Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

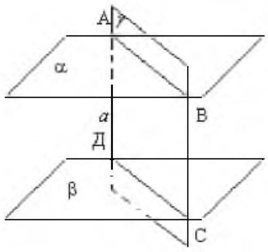
Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



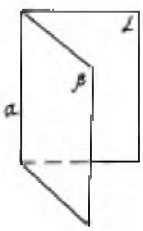
Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Теорема. Если две параллельные плоскости пересекаются третей, то прямые пересечения параллельны.

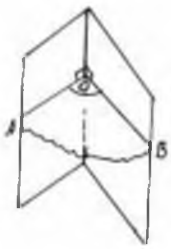




Теорема. Отрезки параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями, равны.



Двугранным углом называется фигура, образованная прямой а и двумя полуплоскостями с общей границей а, и не принадлежащими одной плоскости.
а - ребро двугранного угла,
полуплоскости - его грани его.



Угол АОВ - линейный угол двугранного угла. Чтобы его построить, нужно выбрать произвольную точку О на ребре, а лучи ОА и ОВ должны быть перпендикулярны к ребру.

Признак перпендикулярности плоскостей. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Расстояние от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Расстояние от прямой до параллельной плоскости называется расстояние от любой точки этой прямой до плоскости.

Расстоянием между параллельными плоскостями называется расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Параллельное проектирование для изображения пространственных фигур

Для изображения пространственных фигур в стереометрии пользуются параллельным проектированием.

Пусть дана произвольная плоскость α, точка A (рис. 83) и прямая h, которая пересекает плоскость α. Проведем через точку A прямую, которая параллельна h, она пересекает плоскость α в некоторой точке A_1. Найденную таким образом точку A_1 называют параллельной проекцией точки A на плоскость α в направлении h. Прямую h называют проектирующей прямой, плоскость α - плоскостью проекций.

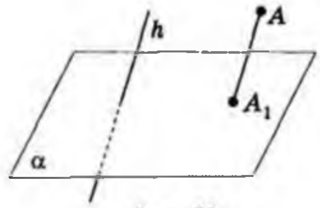


Рис. 83

Чтобы построить проекцию какой-либо фигуры, надо спроектировать на плоскость проекции каждую точку данной фигуры (рис. 84). Приведем некоторые свойства параллельного проектирования.

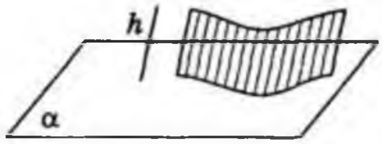


Рис. 84

Теорема. Если отрезки, которые проектируются, не параллельны проектирующей прямой, то при параллельном проектировании:
1) отрезки изображаются отрезками;
2) параллельные отрезки изображаются параллельными отрезками или отрезками одной прямой;
3) отношение длин параллельных отрезков и отрезков одной прямой сохраняется.

Теорема. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot \cos \varphi$$

Варианты практической работы

Вариант 1

1.Закончите утверждение:

1. Двугранным углом называется фигура …
2. Гранями двугранного угла называются …
3. Величиной двугранного угла называется …
4. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется …

2. Сделайте чертеж и решите задачи:

1. Наклонная, проведенная к плоскости, равна a. Найдите ортогональную проекцию этой наклонной на плоскость, если угол между наклонной и плоскостью равен 30^0.

2. На одной грани двугранного угла взяты две точки A и B. Из них опущены перпендикуляры AA_1, BB_1 на другую грань и AA_2, BB_2 на ребро двугранного угла. Найдите BB_2, если $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 3$ см, $AA_2 = 24$ см.

3. Найти площадь ортогональной проекции многоугольника, площадь которого равна 50 см^2, а угол между плоскостью многоугольника и его проекции равен 60°.

4. Найти площадь многоугольника, если площадь ортогональной проекции этого многоугольника равна 50 см^2, а угол между плоскостью многоугольника и его проекцией равен 45°.

Вариант 2

1.Закончите утверждение:

1. Ребром двугранного угла называется …
2. Линейным углом двугранного угла называется …
3. Величиной двугранного угла называется …
4. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется …

2. Сделайте чертеж и решите задачи:

1. Наклонная, проведенная к плоскости, равна a. Найдите ортогональную проекцию этой наклонной на плоскость, если угол между наклонной и плоскостью равен 60^0.
2. На одной грани двугранного угла взяты две точки, отстоящие от его ребра на 9 см и 12 см. Расстояние от первой точки до другой грани двугранного угла равно 20 см. Найдите расстояние от этой грани до второй точки.
3. Площадь многоугольника равна 64 см^2, а площадь ортогональной проекции - 32 см^2. Найдите угол между плоскостями многоугольника и его проекции.
4. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 6 найдите площадь ортогональной проекции треугольника на плоскость которая образует с плоскостью треугольника угол 30^0.

Практическое занятие **№17 -18**

«Решение комбинаторных задач»

Цель работы:
Формирование основных понятий комбинаторики: размещения из m элементов по n, сочетания из m элементов по n, перестановки из n элементов; формирование умений и навыков вычисления значений комбинаторных выражений по формулам.
Оборудование: инструкционно-технологические карты.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала
1) Перестановки.
2) Размещения.
3) Сочетания.
4) Бином Ньютона.
5) Выполнение тренировочных упражнений.
2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Перестановками из n разных элементов называются соединения, которые состоят из n элементов и отличаются друг от друга только порядком их расположения.
Число перестановок из n элементов обозначают P_n и вычисляют по формуле $\boldsymbol{P_n = n!}$
n! (n – факториал) $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots\ n$
Пример. Сколькими способами можно разместить 12 человек за столом, на котором поставлены 12 приборов?
Решение. $P_{12} = 12! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots\ 12 = 479\ 001\ 600$ *Ответ:* 479 001 600
Комбинации из m элементов по n элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называются **размещениями.**
Обозначаются A_m^n и вычисляются по формуле $A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$, $A_n^n = n!$
Пример. Сколько существует вариантов распределения трёх призовых мест, если в розыгрыше участвуют 7 команд?
Решение. $A_7^3 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = 210$ *Ответ:* 210 вариантов.
Сочетаниями называются все возможные комбинации из m элементов по n, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом.
Обозначают C_m^n и вычисляют по формуле $C_n^m = \dfrac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$
Пример. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 2 карты?

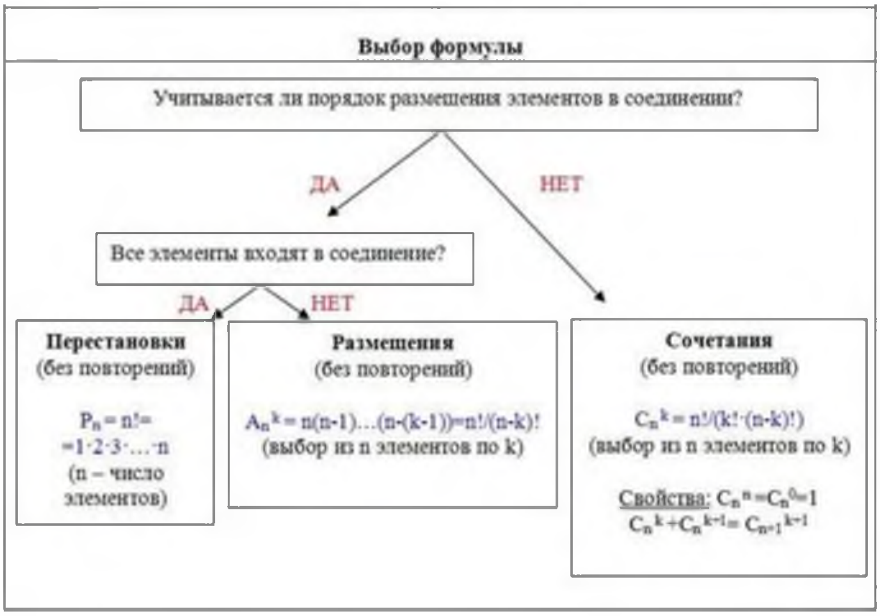
Решение. $C_{36}^{2}=\dfrac{36!}{(36-2)!\cdot 2!}=\dfrac{36!}{34!\cdot 2!}=630$ *Ответ*: 630 способов.

Бином Ньютона $$(a+b)^m = C_m^0\cdot a^m + C_m^1\cdot a^{m-1}b + C_m^2\cdot a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n\cdot a^{m-n}b^n + \ldots + C_m^{m-1}\cdot ab^{m-1} + C_m^m\cdot b^m.$$

Задача 1 Записать разложение бинома $(x-2)^6$.

▶ По формуле (1) находим

$$(x-2)^6 = (x+(-2))^6 =$$
$$= C_6^0x^6 + C_6^1x^5\cdot(-2) + C_6^2x^4\cdot(-2)^2 + C_6^3x^3\cdot(-2)^3 + C_6^4x^2\cdot(-2)^4 + C_6^5x\cdot(-2)^5 + C_6^6\cdot(-2)^6 =$$
$$= x^6 + 6x^5\cdot(-2) + 15x^4\cdot 4 + 20x^3\cdot(-8) + 15x^2\cdot 16 + 6x\cdot(-32) + 64 =$$
$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64.$$ ◁



Рассмотрим решение нескольких задач на разные виды соединений без повторений.

Пример 1. Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе повторяться не могут.

Решение. Для выбора формулы выясняем, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок учитывается и не все элементы одновременно выбираются. Значит, это соединение – размещение из 7 элементов по 3. Воспользуемся формулой для числа размещений: $A_7^3 = 7(7-1)(7-2) = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$ чисел.

Ответ: 210.

Пример 2. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры разные, а номер не может начинаться с нуля?

Решение. На первый взгляд эта задача такая же, как и предыдущая, но сложность в том, что надо не учитывать те соединения, которые начинаются с нуля. Значит необходимо из существующих 10-ти цифр составить все семизначные номера телефонов, а потом от полученного числа отнять количество номеров, начинающихся с нуля. Формула будет иметь вид: $A_{10}^7 - A_9^6 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 - 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 544\,320$.

Ответ: 544 320.

Пример 3. Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это сборники стихотворений, так, чтобы сборники стояли рядом?

Решение. Сначала примем 5 сборников условно за одну книгу, потому что они должны стоять рядом. Так как в соединении существенным есть порядок, и все элементы используются, значит это перестановки из 8 элементов (7 книг + условная 1 книга). Их количество P_8. Далее будем переставлять между собой только сборники стихотворений. Это можно сделать P_5 способами. Поскольку нам нужно расставить и сборники, и другие книги, то воспользуемся правилом произведения. Следовательно, $P_8 \cdot P_5 = 8! \cdot 5!$. Число способов будет большим, поэтому ответ можно оставить в виде произведения факториалов.

Ответ: $8! \cdot 5!$

Пример 4. В классе 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории возле школы нужно 4 мальчика и 3 девочки. Сколькими способами можно их выбрать со всех учеников класса?

Решение. Сначала отдельно выберем 4 мальчика из 16 и 3 девочки из 12. Так как порядок размещения не учитывается, то соответственные соединения – сочетания без повторений. Учитывая необходимость одновременного выбора и мальчиков, и девочек, используем правило произведения. В результате число способов будет вычисляться таким образом:

$C_{16}^4 \cdot C_{12}^3 = (16!/(4! \cdot 12!)) \cdot (12!/(3! \cdot 9!)) = ((13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16) / (2 \cdot 3 \cdot 4)) \cdot ((10 \cdot 11 \cdot 12) / (2 \cdot 3)) =$ 400 400.

Ответ: 400 400.

Пример 5. В некотором учреждении имеются две различные вакантные должности, на каждую из которых претендуют три сотрудника: А, В, С. Сколькими способами из этих трех кандидатов можно выбрать два лица на эти должности?

Решение. АВ, ВА, ВС, СВ, АС, СА (всего шесть способов).

Пример 6. Для участия в соревнованиях требуется выбрать двоих спортсменов из трех кандидатов: А, В, С. Сколькими способами можно осуществить этот выбор?

Решение. АВ, ВС, АС (всего три способа).

Студентам предлагается два проблемных задания: 1) установить различие между этими двумя внешне схожими задачами и 2) предположить, в какой задаче результат будет больше, и почему. После этого предлагается решить эти задачи методом перебора всевозможных вариантов.

Задача 1. Сколькими способами могут занять I, II, III места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м? *Ответ*: 366.

Задача 2. Из 30 обучающихся группы надо выбрать старосту и помощника старосты. Сколькими способами это можно сделать? *Ответ:* 870.

Задача 3. Сколькими способами можно составить букет из трёх цветков, выбирая цветы из девяти имеющихся? *Ответ:* 84.

Задача 4. В группе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде? *Ответ:*21

Варианты практической работы

1. Вычислить.

1вариант	$\frac{5!-3!}{4!}$	$A_{12}^5 \cdot p_5$	$\frac{p_6 - p_2}{4!}$	$C_8^3 + 3!$
2 вариант	$\frac{5! \cdot 3!}{6!}$	$C_7^2 \cdot 5! + A_4^2$	$\frac{A_{12}^5}{4!}$	$6! - C_{10}^8$

2. Решить задачу.

Вариант 1

1. Сколько трехбуквенных слов можно образовать из букв слова «ПЕРСИК»?

2. Сколькими способами могут разместиться пять человек вокруг круглого стола?
3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0;1;2;4;5? При этом цифры в числе не должны повторяться.
4. В бригаде из двадцати пяти человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?
5. Записать разложение Бинома: $(x + 2)^7$

Вариант 2

1. Сколько различных слов, даже бессмысленных можно образовать, представляя буквы «АРБУЗ»?
2. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг?
3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2;3;4;5;6? При этом цифры в числе не должны повторяться.
4. Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?
5. Записать разложение Бинома: $(x + 3)^5$

Практическое занятие **№19 -20**

«Векторы. Действия с векторами. Декартова система координат в пространстве»

Цель работы:
Обобщение и систематизация знаний по данной теме, формирование навыков выполнения действий над векторами в алгебраической и геометрической форме.
Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы.

План выполнения работы

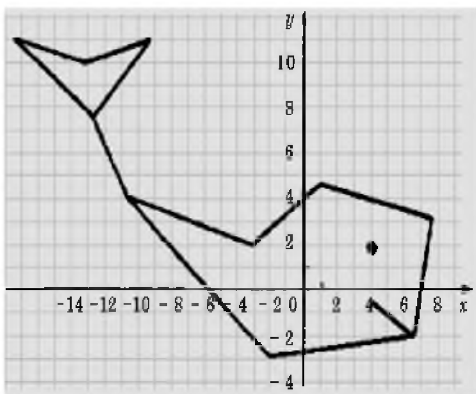
1. Повторение теоретического материала
1) Декартовы координаты в пространстве. Системы координат.
2) Векторы. Координаты вектора.
3) Сложение векторов. Умножение вектора на число.
4) Выполнение тренировочных упражнений.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

1. Построим следующие точки на прямоугольной системе координат и соединим их линией:

(4; – 0,5), (6,5; – 2), (– 2; – 3), (– 10,5; 4), (– 12,5; 7,5), (– 9; 11), (– 13; 10), (– 17; 11), (– 12,5; 7,5), (– 10,5; 4), (– 3; 2), (1; 4,5), (7,5; 3), (6,5; – 2); глаз: (4; 2).



Предлагаю заполнить таблицу, сделав сравнительную характеристику.

На плоскости	В пространстве
Определение	Определение

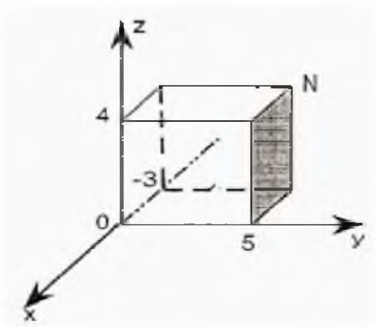
2 оси, ОУ- ось ординат, ОХ- ось абсцисс	3 оси, ОХ - ось абсцисс, ОУ – ось ординат, OZ - ось аппликат.
ОХ перпендикулярна ОУ	ОХ перпендикулярна ОУ, ОХ перпендикулярна OZ , ОУ перпендикулярна OZ.
(О;О)	(О;О;О)
(Х; У)	(Х; У; Z)
Расстояние между точками	Расстояние между точками
Координаты середины отрезка	Координаты середины отрезка

Вопросы для заполнения первой части таблицы.

1. Сформулируйте определение декартовой системы координат.
2. Попробуйте сформулировать определение декартовой системы координат в пространстве.
3. Назовите оси координат на плоскости.
4. Назовите оси координат в пространстве. Название, какой оси мы не изучали? (Знакомство с новым словом *“аппликата”)*
5. Под каким углом располагаются оси координат друг к другу?
6. Назовите координату начала координат на плоскости (в пространстве).
7. Как задается координата точки на плоскости и в пространстве?
8. Запишите формулы расстояния между двумя точками на плоскости и в пространстве.
9. Запишите формулы для нахождения координат середины отрезка.

Тренировочные упражнения

Пример 1. Постройте в системе координат точку N (-3;5;4) и точку М (-3;4;-2).



Решение.

1. Найдите расстояние между точками А(1,2,3) и В(-1,0,5).

$$AB=\sqrt{(-1-1)^2+(0-2)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{3}$$

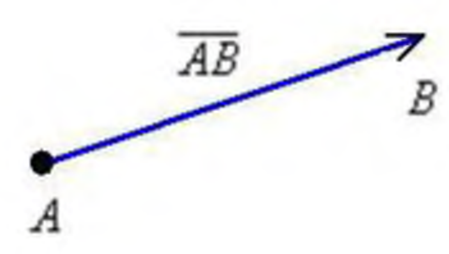
2. А(1,2,3) В(x,2,-3) АВ=?

Пример 2. Вычислить координаты середины отрезка АВ, если А(2;-1;3) и В(1,4,-1).

$x=\frac{2+1}{2}=1{,}5$ $y=\frac{-1+4}{2}=3{,}5$ $z=\frac{3-1}{2}=1$

Действия над векторами

Вектором называется направленный отрезок, который имеет начало и конец.



1) Координаты вектора

Чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вычесть координаты начала вектора.

$A(x_1; y_1; z_1)$ $B(x_2; y_2; z_2)$ $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$

Координаты вектора не изменяются при параллельном переносе.

Два вектора равны, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

Векторы называют **коллинеарными** если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Заметьте, что сонаправленность подразумевает коллинеарность векторов. У равных векторов соответствующие координаты равны.

Определение: Два коллинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***сонаправленными***, если их направления совпадают: $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$. Два коллинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *противоположно направленными,* если их направления противоположны: $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$.

Длиной или **модулем** ненулевого вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Длина нулевого вектора равна нулю.

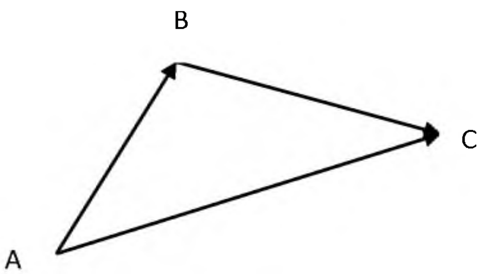
$$\overrightarrow{|a|} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2) Сложение векторов

$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ $\vec{a} + \vec{b}\ (x_2 + x_1;\ y_2 + y_1;\ z_2 + z_1)$

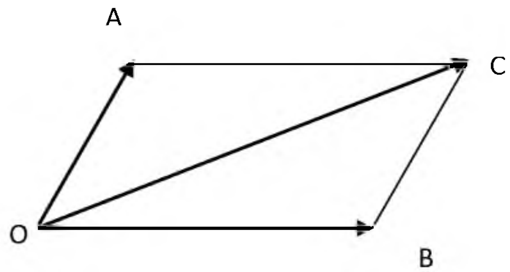
Правило треугольника

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

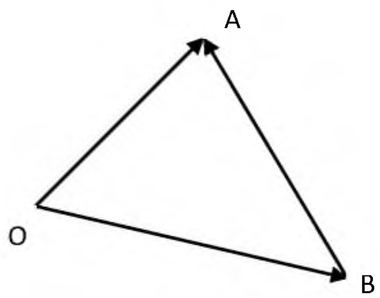


Правило параллелограмма

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$$



3) Вычитание векторов $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$

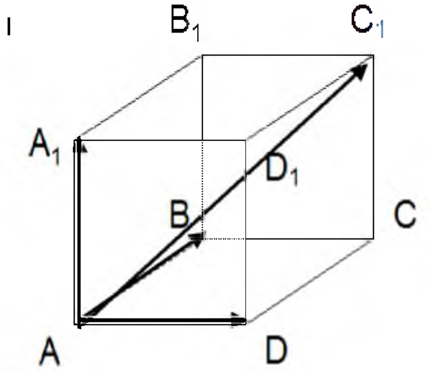


4) Умножение вектора на число

$\overrightarrow{ka}\ (kx; ky; kz)$

Произведением ненулевого вектора a на число k называется такой вектор $\vec{в}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ сонаправлены при k > 0 и противоположно направлены при k < 0.

Для сложении *некомпланарных векторов* применяют *правило параллелепипе-*



да

$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC_1}$

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Заполните пропуски

1) Вектором на плоскости называется …
2) Длиной или модулем вектора называется …
3) Два вектора в пространстве называются противоположно направленными, если …
4) При умножении вектора на число …

2. Даны точки А (3;-1;2) и В(5;1;1).

Найдите: а) координаты вектора $\overrightarrow{AB}$; б) модуль вектора $\overrightarrow{AB}$;

в) координаты точки С – середины отрезка АВ.

3. Даны векторы $\vec{a}$ (-2;3;1) и $\vec{b}$ (4;-1;2).

Найдите вектор 2 $\vec{a}$ - $\vec{b}$. При каком значении х и у вектор $\vec{c}$ *(8; x; y)* и вектор $\vec{a}$ коллинеарны?

Определите совпадают ли в этом случае направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

4. Даны точки А(2;-3;1); В(4;-5;0); С(5;0;-4) и D(7;-2;-3). Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$?

Вариант 2

1. Заполните пропуски

1) Вектор изображается …
2) Чтобы найти координаты вектора, надо ….
3) Два вектора равны, если …
4) Нулевой вектор коллинеарен …….. вектору.

2. Даны точки А (-1;0;4) и В(1;1;2).

Найдите: а) координаты вектора $\overrightarrow{AB}$; б) модуль вектора $\overrightarrow{AB}$;

в) координаты точки С – середины отрезка АВ.

3. Даны векторы $\vec{a}$ (-2;3;1) и $\vec{b}$ (4;-1;2).

Найдите вектор $\vec{a}$ + 3$\vec{b}$. При каком значении х и z вектор $\vec{c}$ *(8; x; z)* и вектор $\vec{b}$ коллинеарны?

Определите совпадают ли в этом случае направления векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

4. Даны точки A(-1;-3;2); B(5;-1;-1); C(-3;0;2) и D(3;2;-3). Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$?

Практическое занятие **№21 -22**

«Скалярное произведение векторов. Угол между векторами»

Цель работы:
Обобщение и систематизация знаний по данной теме, формирование навыков выполнения действий над векторами: нахождение скалярного произведения векторов, угла между векторами.
Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Скалярное произведение векторов.
2) Угол между векторами.
3) Выполнение тренировочных упражнений.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Скалярное произведение векторов

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ всегда образуют угол.

Угол между векторами может принимать значения от 0° до 180° включительно.

Для векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Определение. Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

Отсюда следует, $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Свойства скалярного произведения. Если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны.

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\vec{a}$ (2;-1;4) и $\vec{b}$ (3;2;-1);

б) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{1}{6}$.

2. Найдите значение *m*, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если $\vec{a}$ (2;-4; *m*) и $\vec{b}$ (3;-1;5).

3. Даны точки A(3;-2;1), B(-2;1;3), C(1;3;-2). Найдите угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

4. Докажите, что треугольник с вершинами A(3;-2;1), B(-2;1;3), C(1;3;-2) равносторонний.

Вариант 2

1. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\vec{a}$ (-2;3;1) и $\vec{b}$ (-1;-1;4);

б) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\cos(\widehat{a, b}) = 0{,}1$.

2. Найдите значение *m*, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если $\vec{a}$ (3; 2; -1) и $\vec{b}$ (2; *m*;-2).

3. Даны точки A(3;-2;1), B(-2;1;3), C(1;3;-2). Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

4. Докажите, что треугольник с вершинами A(7;1;-5), B(4;-3;-4), C(1;3;-2) равнобедренный.

Практическое занятие **№ 13**

«Радианная и градусная мера измерения углов»

Цель работы:

Корректировка знания, умения и навыки по теме «Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой»; формирование умений перевода радианной меры в градусную и наоборот, нахождения значений тригонометрических функций.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы значений тригонометрических функций некоторых углов, таблицы формул тригонометрии, справочники.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Радианная мера угла. Вращательное движение.

2) Синус, косинус, тангенс и котангенс числа.

3) Выполнение тренировочных упражнений.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Ответить на вопросы:

1) Что такое угол в 1 радиан?

2) Как перевести градусы в радианы?

3) Как перевести радианы в градусы?

4) Дайте определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла.

5) Назовите знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса в координатных четвертях.

Радианная мера приспособлена для изучения криволинейного (кругового) движения, она существенно упростила многие расчеты и формулы:

длина дуги окружности: $l = \frac{\pi r n}{180}$ $l = \alpha r$ площадь сектора: $S = \frac{\pi r^2 n}{360}$ $S = \frac{\alpha r^2}{2}$

Рассмотреть формулы перехода от градусной меры к радианной и наоборот.

Пример 1. Выразить в градусах 4,5 рад.

Т.к. 1 рад = $\frac{180°}{\pi}$, то 4,5 рад = 4,5 · $\frac{180°}{\pi}$≈258°

Пример 2. Найдем радианную меру угла в 72°.

Т.к. 1° = $\frac{\pi}{180}$, то 72° = 72 · $\frac{\pi}{180}$ рад =$\frac{2\pi}{5}$ рад.

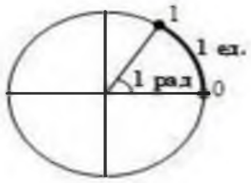
3. Радианная мера углов и дуг

Угол в 1° — это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой составляет $\frac{1}{360}$ части окружности.

Угол поворота — это угол, полученный вращением луча около его начала *O* от начального положения *OA* до конечного положения *OB*.

Угол в 1 радиан — это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

$$\boxed{1\,рад \approx 57{,}3° \approx 57°17'45''}$$



(W) Радианная мера угла численно равна пути, который проходит точка по дуге единичной окружности, на которую опирается этот угол.

Для связи радианов и градусов используют развернутый угол:

$$\boxed{\pi\ рад = 180°}$$

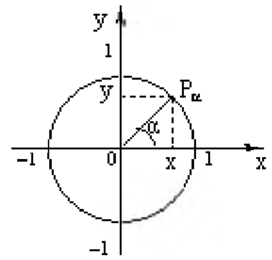
$$1° \Rightarrow \frac{\pi}{180} \qquad \pi \Rightarrow 180°$$

(NB)

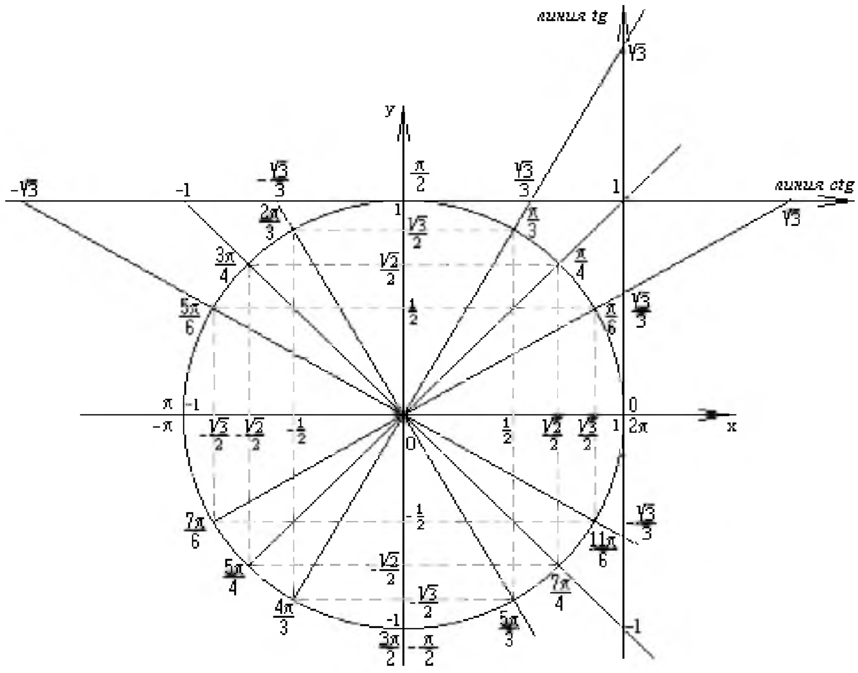
1. *Говорят: «угол $\frac{\pi}{3}$ радиан» или чаще «угол $\frac{\pi}{3}$ ». Обозначение «радиан» или «рад», как правило, опускают.*
2. *Термин «радианное измерение углов» равносилен термину «числовое измерение углов», т.е. фраза «угол α равен двум радианам» равносильна фразе «угол α равен числу 2» и даже «угол α равен двум». Поэтому вопрос типа « Чему равно $\frac{\pi}{3}$?» некорректен. Нужно спрашивать: « Чему равен угол $\frac{\pi}{3}$?» (60°) или « Чему равно число $\frac{\pi}{3}$?» (≈ 1,05).*

На рисунке совмещены декартова система координат и окружность единичного радиуса. Окружность «эквивалентна» понятию координатной прямой (начало отсчета – точка пересечения окружности с положительной частью оси OX, положительное направление – против часовой стрелки, единичный отрезок выражен через число π). На окружности отмечены точки, полученные при повороте радиуса окружности, совпадающего с
положительной частью оси OX, на различные углы α. Абсциссы этих точек – cos α, ординаты – sin α. Дополнительно проведены две касательные к окружности (линии тангенса и котангенса).

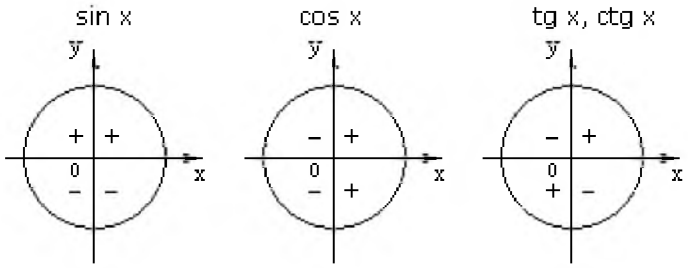
Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса



$P_\alpha(x;\ y)$
$x = \cos\alpha$
$y = \sin\alpha$
$|\cos\alpha| \le 1$
$|\sin\alpha| \le 1$



Знаки тригонометрических функций



Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса

sin (–α) = – sin α tg (–α) = – tg α

cos (–α) = cos α ctg (–α) = – ctg α

cos (180° - α) = - cos α tg (180° - α) = tg α

sin (180° - α) = sin α ctg (180° - α) = ctg α

Значения тригонометрических функций

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Тренировочные упражнения

1. По каким формулам переводят градусную меру угла в радианную и наоборот?

2. Выразите в радианах углы, равные 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°.

3. Переведите из радианной меры в градусную: 0,2; 3,1; $\frac{5}{2}\pi$; - $\frac{3}{2}\pi$; - $\frac{1}{3}\pi$; $\frac{5}{4}\pi$.

4. Составить таблицу значений тригонометрических функций для углов 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°.

5. Определите знак: $sin(-212^0)$; $ctg\dfrac{7\pi}{9}$; $\cos\dfrac{3\pi}{5}tg\dfrac{\pi}{9}$; . $\sin 4\cdot\cos 5$

6. Найдите значение выражения: а) sin ($-\frac{\pi}{4}$) + 3 cos $\frac{\pi}{3}$ – tg $\frac{\pi}{6}$ + ctg($-\frac{\pi}{3}$).

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Выразите в радианах:

10°; 120°; 160^0; 220°; 315°; 765°.

2. Переведите из радианной меры в градусную: 1,5π; $\frac{3}{5}\pi$; $-\frac{9}{2}\pi$; 2.

3. Определите знак выражения: sin 305°; $\dfrac{\cos 200^0\cdot tg300^0}{\sin 400^0}$; cos 2 · ctg 4.

4. Вычислите: а) $\sin\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{4}+3tg\dfrac{\pi}{3}$; б) cos 210° · sin 300° + ctg 45° · tg 225°;

в) $6\cos^2\dfrac{\pi}{4}+tg^2\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)-ctg\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Вариант 2

1. Выразите в радианах:

70°; 150°; 225°; 240°; 320°; 675°.

2. Переведите из радианной меры в градусную: 12π; $\frac{5}{6}\pi$; $-\frac{1}{3}\pi$; 10.

3. Определите знак выражения: cos 210°; $\dfrac{\sin 130^\circ\cdot ctg\,305^\circ}{\cos 280^\circ}$; tg 3 · sin 6.

4. Вычислите: а) $\sin\dfrac{\pi}{6}-\cos\dfrac{\pi}{3}+2tg\dfrac{\pi}{4}$; б) sin 315° · cos 225° + ctg 210° · tg 300°

в) $5\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+4\cos 0-3\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

Практическое занятие **№ 23 -24**

«Основные тригонометрические тождества, формулы приведения»

Цель работы:

Формирование умения преобразования тригонометрических выражений с помощью основных тригонометрических тождеств, формул приведения и сложения.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы значений тригонометрических функций некоторых углов, таблицы формул тригонометрии, справочники.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Основные тригонометрические тождества.
2) Формулы приведения.
3) Формулы сложения.
4) Формулы двойного угла.
5) Формулы половинного угла.
6) Выполнение тренировочных упражнений.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $tg\,\alpha\cdot ctg\alpha = 1$ $\qquad$ $1 + tg^2\,\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

Пример 1. Упростите выражения: а) $1 - \cos^2\alpha$; б) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$

Следствием из основного тригонометрического тождества является формула, выражающая $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$, $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$; $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

Пример 2. Найдите значение тригонометрической функции $\cos\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Формулы приведения

α	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Тригонометрическая функция в правой части равенства берется с тем же знаком, какой имеет исходная функция, если считать, что угол $\alpha \in$ I четверти;

для углов $\pi \pm \alpha$ и $2\pi \pm \alpha$ название исходной функции сохраняется;

для углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ и $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ название исходной функции заменяется на кофункцию.

Пример 3. Найдите значение а) $\sin 210°$; б) $\operatorname{tg} 300°$; в) $\cos\frac{8\pi}{3}$.

а) $\sin 210° = \sin(180° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

б) $\operatorname{tg} 300° = \operatorname{tg}(360° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$

в) $\cos\frac{8\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Формулы сложения

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

Пример 4. Вычислите: а) $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

б) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Пример 5. Вычислите: $\cos 33^\circ\cos 63^\circ + \sin 33^\circ\sin 63^\circ = \cos(63° - 33°) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Формулы двойного угла

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

Пример 6. Вычислите: $2 \sin 75° \cos 75° = \sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найти значения косинуса, тангенса и котангенса.

2. Вычислите:

а) $\dfrac{\cos 120^0 \cdot \cos 50^0 + \sin 120^0 \cdot \sin 50^0}{\cos 25^0 \cdot \cos 45^0 - \sin 25^0 \cdot \sin 45^0}$; б) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$;

в) $\sin 315^\circ \cdot \cos 225^\circ + \mathrm{ctg}\, 210^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 300^\circ$.

3. Представив 105° как 60° + 45°, вычислите sin 105°.

4. Упростите выражения:

а) $2\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+tg(\pi-\alpha)\cdot ctg(2\pi+\alpha)$; б) $\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - 2\sin\alpha$.

5. Докажите тождество: $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 = 1-\sin 2\alpha$

Вариант 2

1. Дано: $\sin\alpha = 0{,}8$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найти значения косинуса, тангенса и котангенса.

2. Вычислите:

а) $\dfrac{\sin 5^0 \cdot \cos 15^0 + \cos 5^0 \cdot \sin 15^0}{\cos 80^0 \cdot \cos 150^0 + \sin 80^0 \cdot \sin 150^0}$; б) $2\cos\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{8}$

в) $\cos 210^\circ \cdot \sin 300^\circ + \mathrm{ctg}\, 45^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 225^\circ$.

3. Представив 15° как 45° – 30°, вычислите cos 15°.

4. Упростите выражения:

а) $2\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\cdot\sin(\pi+\alpha)+tg(\pi+\alpha)\cdot ctg(2\pi-\alpha)$; б) $\cos\alpha - \sin\alpha\cdot ctg\alpha$.

5. Докажите тождество: $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$

Практическое занятие **№25 -26**

«Преобразование тригонометрических функций»

Цель работы:

Обобщить и систематизировать знания формул тригонометрии, преобразования тригонометрических выражений с помощью формул суммы и разности тригонометрических функций, формул половинного аргумента.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы значений тригонометрических функций некоторых углов, таблицы формул тригонометрии, справочники.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Основные формулы тригонометрии.
2) Формулы суммы и разности тригонометрических функций.
3) Формулы двойного угла.
3) Формулы половинного угла.

4) Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента
6) Выполнение тренировочных упражнений.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$$1)\ \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2)\ \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$3)\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$4)\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$5)\ tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$6)\ ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Пример 7. Упростите выражение:

а) $\sin 10^\circ+\sin 50^\circ=2\sin\frac{10^\circ+50^\circ}{2}\cos\frac{10^\circ-50^\circ}{2}=2\sin 30^\circ\cos(-20^\circ)=2\cdot\frac{1}{2}\cos 20^\circ=\cos 20^\circ$

б) $\sin 40^\circ-\sin 20^\circ=2\cos\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\sin\frac{40^\circ-20^\circ}{2}=2\cos 30^\circ\sin 10^\circ=2\cdot\frac{\sqrt3}{2}\sin 10^\circ=\sin 10^\circ$

Пример 8. Докажите тождество: $\frac{\sin 56^\circ+\sin 14^\circ}{\cos 56^\circ+\cos 14^\circ}=ctg\,55^\circ$

Тригонометрические функции половинного аргумента

Если в формулах двойного угла $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ и $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ заменить угол α на $\frac{\alpha}{2}$, то получим *формулы половинного аргумента*:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\qquad tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}\qquad \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}\qquad tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}\qquad ctg\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\qquad ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Пример 1.

1. Вычислить $\sin 4\alpha+\cos 4\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,2\alpha=4$.

Р е ш е н и е. Выразив $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$ через $\mathrm{tg}\,2\alpha$ по формулам (1), (2), получим:

$$\sin 4\alpha+\cos 4\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\alpha=$$

$$=\frac{2\,\mathrm{tg}\,2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}+\frac{1-\mathrm{tg}^2 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\,2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cdot4}{1+16}+\frac{1-16}{1+16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Пример 2. 2. Найти $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0{,}5$.

Решение. Упростим данное выражение:

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha) =$$
$$= -(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\cos 2\alpha.$$

Далее находим:

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5},$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}, \text{ т. е.}$$
$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{7}{25}.$$

Пример 3. Преобразовать в произведение: а) $\frac{\sin 7x - \sin 5x}{\sin 7x + \sin 5x}$

Применяя формулы суммы и разности синусов, получим

$$\frac{\sin 7x - \sin 5x}{\sin 7x + \sin 5x} = \frac{2\sin\frac{7x-5x}{2}\cdot\cos\frac{7x+5x}{2}}{2\sin\frac{7x+5x}{2}\cdot\cos\frac{7x-5x}{2}} = \frac{\sin x\cos 6x}{\sin 6x\cos x} = tgxctg\,6x.$$

б) 1 + 2cos x

Решение. Вынесем за скобки множитель 2, а за тем представим $\frac{1}{2}$ как $\cos 60^\circ$.

$1 + 2\cos x = 2\left(\frac{1}{2} + \cos x\right) = 2(\cos 60^\circ + \cos x) = 2\cdot\cos\frac{60^\circ + x}{2}\cdot\cos\frac{60^\circ - x}{2} =$

$= 4\cos\left(30^\circ + \frac{x}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{x}{2}\right)$

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Вычислите: а) $\sin 60^\circ + \sin 40^\circ$; б) $\cos\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$.

2. Преобразуйте в произведение: а) $\frac{1}{2} + \cos x$; б) $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}$.

3. Докажите тождество: $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x$.

4. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

Вариант 2

1. Вычислите: а) $\cos 10^\circ + \cos 40^\circ$; б) $\sin\frac{\pi}{12} + \sin\frac{7\pi}{12}$.

2. Преобразуйте в произведение: а) $1 - 2\sin x$; б) $\frac{\cos 6x - \cos 4x}{\cos 6x + \cos 4x}$.

3. Докажите тождество: $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x - \cos y} = -\operatorname{ctg}\frac{x+y}{2}$.

4. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

Практическое занятие **№27 -28**

«Простейшие тригонометрические уравнения»

Цель работы:

Закрепление навыков решения простейших тригонометрических уравнений.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы значений тригонометрических функций некоторых углов, таблицы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений, таблицы формул тригонометрии.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Арксинус, арккосинус, арктангенс числа.
2) Простейшие тригонометрические уравнения.
3) Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений.
4) Выполнение тренировочных упражнений.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Решение тригонометрических уравнений невозможно без знания определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса.

Определение. **Арксинус** числа a - это число, принадлежащее отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен a.

Определение. **Арккосинус** числа a - это число, принадлежащее отрезку $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

Определение. **Арктангенс** числа a - это число, принадлежащее интервалу $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен a.

Определение. **Арккотангенс** числа a - это число, принадлежащее интервалу $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.

568. 1) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; 2) $\arccos 1 = 0$;

3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; 4) $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$;

5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;

6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

586. 1) $\arcsin 0 = 0$; 2) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$;

4) $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; 5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

607. 1) $\mathrm{arctg}\,0 = 0$; 2) $\mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$; 3) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$; 4) $\mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

Пример 1. Вычислите: $2\arcsin(-\frac{1}{2}) + \arccos(-\frac{1}{2}) + \mathrm{arctg}\,1 = 2\cdot(-\frac{\pi}{6}) + (\pi - \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{4} =$

$= -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$

Пример 2. Вычислите: а) $\sin(\arcsin\frac{1}{2}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; б) $\cos(\mathrm{arcctg}\,1) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $3\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arcctg}(-1) = 3\cdot\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{3}$.

Уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\, x = a$ называются простейшими. Для них выведены формулы корней:

$\sin x = a \qquad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$

$\cos x = a \qquad x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z$

$tg\, x = a \qquad x = arctg\; a + \pi n, n \in Z$

$ctg\, x = a \qquad x = arctg\,\frac{1}{a} + \pi n, n \in Z$

Уравнение	***Общее решение***	***Частные случаи***		
		a = -1	*a = 0*	*a = 1*
$\sin x = a$ $\lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\cos x = a$ $\lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n$	$x = \pi + 2\pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = 2\pi n$
$tg\, x = a$ $a \in (-\infty;\infty)$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
$ctg\, x = a$ $a \in (-\infty;\infty)$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

571. 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k$; $\quad x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$;

2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k$; $\quad x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$;

3) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi k$; $\quad x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

589. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k$; $\quad x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$;

2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$; $\quad x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

3) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi k$; $\quad x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

591. 1) $\sin 3x = 1$; $\quad 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k, k \in Z$;

2) $\sin 2x = -1$; $\quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

3) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3} = -1$; $\frac{x}{3} = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi k$; $\quad x = (-1)^{k+1}\frac{3\pi}{4} + 3\pi k, k \in Z$;

4) $2\sin\frac{x}{2} = \sqrt{3}$; $\quad \frac{x}{2} = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k$; $\quad x = (-1)^k \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$;

5) $\sin(x + \frac{3\pi}{4}) = 0$; $\quad x + \frac{3\pi}{4} = 0 + \pi k$; $\quad x = -\frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

6) $\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 0$; $\quad 2x + \frac{\pi}{2} = \pi k$; $\quad x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

610. 1) $\operatorname{tg}x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$;

2) $\operatorname{tg}x = \sqrt{3}$; $x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$;

3) $\operatorname{tg}x = -\sqrt{3}$; $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi k$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$;

4) $\operatorname{tg}x = -1$; $x = \operatorname{atctg}(-1) + \pi k$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

5) $\operatorname{tg}x = 4$; $x = \operatorname{arctg}4 + \pi k, k \in Z$;

6) $\operatorname{tg}x = -5$; $x = \operatorname{arctg}(-5) + \pi k$; $x = -\operatorname{arctg}5 + \pi k, k \in Z$.

611. 1) $\operatorname{tg}3x = 0$; $3x = \pi k$; $x = \frac{\pi}{3}k, k \in Z$;

2) $1 + \operatorname{tg}\frac{x}{3} = 0$; $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = -1$; $\frac{x}{3} = -\frac{\pi}{4} + \pi k$; $x = -\frac{3\pi}{4} + 3\pi k, k \in Z$;

3) $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\frac{x}{6} = 0$; $\operatorname{tg}\frac{x}{6} = -\sqrt{3}$; $\frac{x}{6} = -\frac{\pi}{3} + \pi k$; $x = -2\pi + 6\pi k, k \in Z$.

Пример 3. Решите уравнение: $sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -1$.

По формуле частного случая:

$\frac{\pi}{4} - x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi n$, $n \in Z$.

Пример 4. Решите уравнение: $2cos\,3x = -\sqrt{2}$.

Разделим левую и правую части уравнения на 2: $cos\,3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

По формуле $t = \pm arccos\,a + 2\pi n$ получаем:

$3x = \pm arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n$, $3x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n$, $3x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$.

Разделим левую и правую части уравнения на 3: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Пример 5. Решите уравнение: $3tg\frac{5}{3}x - 1 = 0$.

Выразим $tg\frac{5}{3}x$: $3tg\frac{5}{3}x = 1$, $tg\frac{5}{3}x = \frac{1}{3}$.

По формуле $t = arctga + \pi n$ получаем: $\frac{5}{3}x = arctg\frac{1}{3} + \pi n$.

Разделим левую и правую части уравнения на $\frac{5}{3}$: $x = \frac{3}{5}arctg\frac{1}{3} + \frac{3\pi n}{5}$, $n \in Z$.

Варианты практической работы

<table>
<tr><th colspan="2">Вариант 1</th><th colspan="2">Вариант 2</th></tr>
<tr><td colspan="4">1. Вычислите</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\arcsin\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$</td><td colspan="2">$\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos 1$</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Решите уравнение:</td></tr>
<tr><td>1. $\sin x - \frac{1}{2} = 0$;</td><td>2. $2\cos x - \sqrt{3} = 0$;</td><td>1. $\cos x - \frac{1}{2} = 0$;</td><td>2. $2\sin x - \sqrt{3} = 0$;</td></tr>
<tr><td>3. $2\cos x - 1 = 0$;</td><td>4. $\operatorname{tg}x - \sqrt{3} = 0$;</td><td>3. $2\sin x - 1 = 0$;</td><td>4. $\sqrt{3}\operatorname{ctg}x + 1 = 0$;</td></tr>
</table>

5. $\mathrm{ctg}\,3x = 1$; 6. $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; 7. $\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;	5. $\mathrm{tg}\,2x = 1$; 6. $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 7. $\mathrm{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Практическое занятие **№ 29 -30**

«Решение тригонометрических уравнений»

Цель работы:

1. Закрепление навыков определения типов тригонометрических уравнений (простейшее, квадратное относительно sin и cos, однородное относительно sin и cos, уравнение, решаемое разложением на множители левой части).

2. Усвоение алгоритма решения основных типов тригонометрических уравнений.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы значений тригонометрических функций некоторых углов, таблицы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений, таблицы формул тригонометрии.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Арксинус, арккосинус, арктангенс числа.
2) Формулы корней простейших тригонометрических уравнений.
3) Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений.
4) Типы тригонометрических уравнений и методы их решения.
5) Выполнение тренировочных упражнений.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

К простейшим тригонометрическим уравнениям сводятся все другие. Для большинства таких уравнений требуется применение различных формул и преобразование тригонометрических выражений.

Пример 1. Решите уравнение: $2sin^2 x - 5cos\,x + 1 = 0$.

Применив основное тригонометрическое тождество: $sin^2 x = 1 - cos^2 x$, получим:

$$2\left(1 - cos^2 x\right) - 5cos\,x + 1 = 0,$$

$$2 - 2cos^2 x - 5cos\,x + 1 = 0,$$

$$2cos^2 x + 5cos\,x - 3 = 0.$$

Это уравнение является **квадратным относительно** $cos\,x$ **.**

Обозначим $cos\,x = y$, тогда $2y^2 + 5y - 3 = 0$. Полученное уравнение имеет решения

$$y_1 = -3, \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Составим два простейших уравнения:

$$cos\,x = -3 \quad \text{и} \quad cos\,x = \frac{1}{2}.$$

Первое уравнение решений не имеет, так как $-1 \le cos\,x \le 1$. Второе уравнение имеет решение:

$x = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,$ $\qquad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

Пример 2. Решите уравнение: $3sin^2 x - 2sin\,2x + 5sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2$.

Так как по формуле приведения $sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=cos^2 x$, а $sin 2x = 2 sin x cos x$ по формуле двойного угла, то $$3sin^2 x - 4 sin x cos x + 5cos^2 x - 2 = 0.$$
При помощи основного тригонометрического тождества заменим 2 на $2\left(sin^2 x + cos^2 x\right)$ и получим:
$$3sin^2 x - 4 sin x cos x + 5cos^2 x - 2\left(sin^2 x + cos^2 x\right) = 0,$$
откуда
$$sin^2 x - 4 sin x cos x + 3cos^2 x = 0.$$
Это уравнение является **однородным относительно** $sin x$ **и** $cos x$**.** Разделив обе части полученного уравнения на $cos^2 x$, получим
$$tg^2 x - 4tgx + 3 = 0.$$

Это уравнение является квадратным относительно tgx. Обозначим $tgx = y$, тогда $y^2 - 4y + 3 = 0$.
Полученное квадратное уравнение имеет корни $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Из уравнения $tgx = 1$ получаем:
$x_1 = arctg 1 + \pi n$, $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

Из уравнения $tgx = 3$ получаем $x_2 = arctg 3 + \pi k$, $k \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,\ arctg 3 + \pi k,\ k \in Z$

Пример 3. Решите уравнение: $cos 2x = cos 6x$.
Запишем данное уравнение иначе: $cos 2x - cos 6x = 0$.
По формуле разности косинусов $cos x - cos y = -2 sin\frac{x+y}{2} sin\frac{x-y}{2}$ получаем:
$$2 sin 4x sin 2x = 0.$$
Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому если $sin 4x = 0$, то $4x = \pi n,\ x_1 = \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$; если $sin 2x = 0$, то $2x = \pi k,\ x_2 = \frac{\pi k}{2}.\ k \in Z$.
Можно заметить, что решения второго уравнения уже содержатся в решении первого уравнения и иначе записать ответ.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$.

Пример 4. Решите уравнение: $sin 3x = 2cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
В правой части применим формулу приведения: $sin 3x = 2 sin x$,
$$sin 3x - sin x - sin x = 0,$$
$$\left(sin 3x - sin x\right) - sin x = 0.$$

Применим формулу разности синусов $sin x - sin y = 2 sin\frac{x-y}{2} cos\frac{x+y}{2}$, тогда
$$2 sin x cos 2x - sin x = 0.$$
Вынесем за скобки общий множитель:
$$sin x\left(2cos 2x - 1\right) = 0.$$

Если $\sin x = 0$, то $x_1 = \pi n$; если $2\cos 2x - 1 = 0$, то $2\cos 2x = 1$, $\cos 2x = \frac{1}{2}$, значит,

$2x = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi k,\ 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$.

Ответ: $\pi n,\ n \in Z;\ \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Варианты практической работы

I вариант	II вариант
1. Решить уравнение, сделав подстановку	
1) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ 2) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$ 3) $2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 5$	1) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$ 2) $4 + 5\cos x - 2\sin^2 x = 0$ 3) $3\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x = 8$
2. Решить уравнение методом разложения на множители	
1) $5\sin x + 3\sin 2x = 0$; 2) $\sin 7x - \sin x = 0$;	1) $7\cos x - 4\sin 2x = 0$; 2) $\cos 5x + \cos x = 0$.
3. Решите однородное уравнение	
1) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$	1) $3\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$

Практическое занятие **№31 -32**

«Преобразование графиков функций»

Цель работы.

Обобщение и систематизация навыков и умений выполнения преобразования графиков функций, вычисления значений функции, нахождения области определения функции.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы графиков функций.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Функция. Область определения и множество значений.

2) График функции. Графики элементарных функций.

3) Преобразования графиков функций

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение. Числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D ставится в соответствие по некоторому правилу число y, зависящее от x.

y = f(x) x – независимая переменная или аргумент,

y – зависимая переменная или значение функции.

Определение. Областью определения функции *D(f)* называют множество всех значений, которые может принимать её аргумент (переменная x).

Определение. Множеством значений функции *E(f)* называется множество всех значений, которые принимает функция *f(x)* (переменная y).

Пример1. Найти область определения функции $y = \sqrt{x+1}$

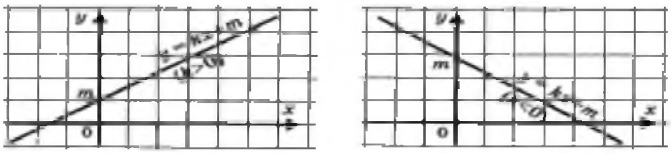
Выражение, стоящее под корнем имеет смысл при всех значениях x, для которых

x + 1 ≥ 0, x ≥ -1

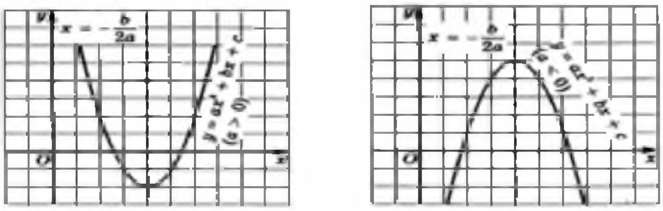
Ответ: $D(y)$: x ∈ [1; ∞).

Определение. Графиком функции f называется множество всех точек *(x; y)* координатной плоскости, где $y = f(x)$, а x «пробегает» всю область определения функции f.

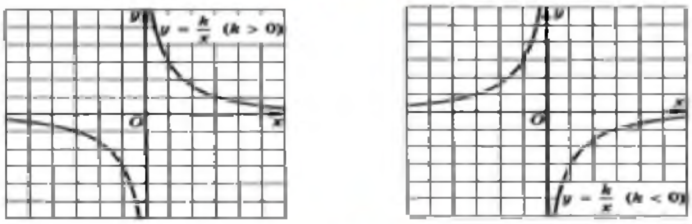
Графики элементарных функций



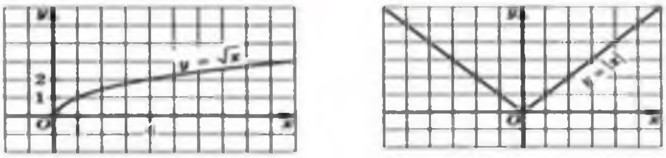
прямая



парабола



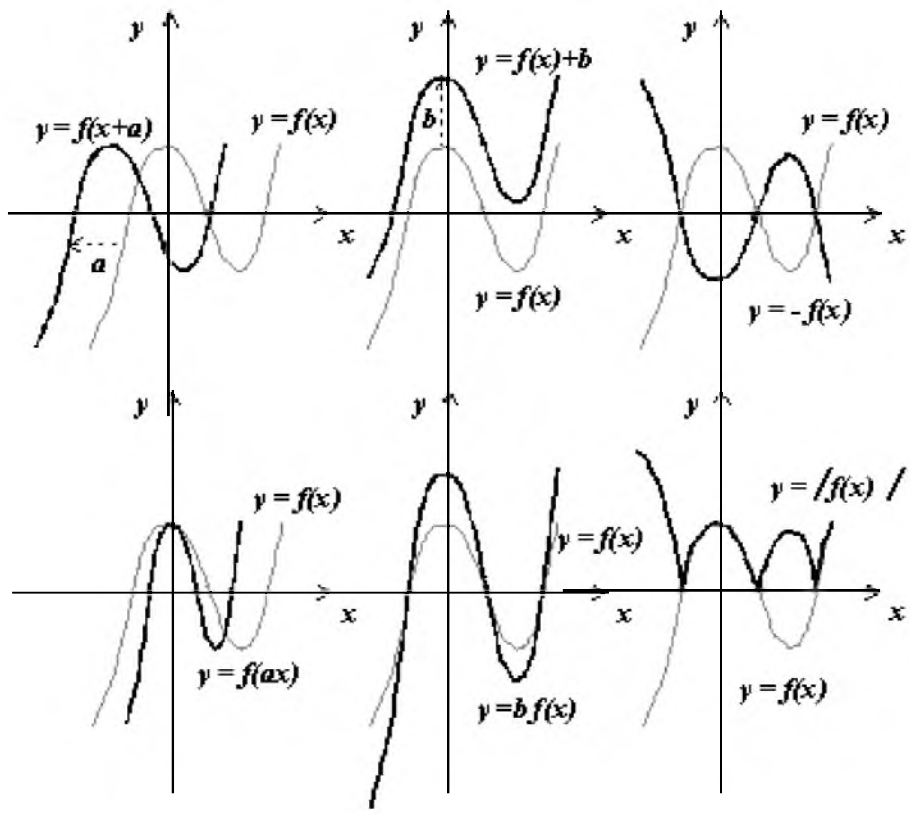
гипербола



Преобразование графиков функций

Общий вид функции	Преобразования
y = f(x) + b	Параллельный перенос графика вдоль оси ординат на | b | единиц • вверх, если b > 0 • вниз, если b < 0
y = f(x -a)	Параллельный перенос графика вдоль оси абсцисс на | *a* | единиц • вправо, если *a* > 0 • влево, если *a* < 0
y = kf(x)	• При k > 1 — растяжение графика вдоль оси абсцисс в k раз • при 0 < k < 1 — сжатие графика вдоль абсцисс в k раз
y = f(kx)	• При k > 1 — сжатие графика к оси ординат в k раз • при 0 < k < 1 — растяжение графика от оси ординат в k раз
y = f(- x)	Симметричное отражение графика относительно оси ординат
y = - f(x)	Симметричное отражение графика относительно оси абсцисс

y =| f(x)|	Часть графика, расположенная ниже оси OX, симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения
y = f(| x |)	Часть графика, расположенная в области x ≥ 0, остается без изменения, а его часть для области x < 0 заменяется симметричным отображением относительно оси OY



Варианты практической работы

I вариант	II вариант
1. Найдите $f(5), f(-1), f(\frac{1}{3})$, если $f(x) = x^2 - x$	**1.** Найдите $f(5), f(-1), f(\frac{1}{3})$, если $f(x) = 3x^2+1$
2. Найдите область определения функции y = $\sqrt{3x-6}$	**2.** Найдите область определения функции y = $\frac{5x-2}{2x+10}$
3. В одной и той же системе координат постройте графики функций:	
1) $y = x^2$ 4) $y = \frac{1}{2}x^2$ 2) $y = x^2 + 2$ 5) $y = (x + 3)^2 - 5$ 3) $y = (x - 2)^2$	1) $y = x^2$ 4) $y = - x^2$ 2) $y = x^2 - 3$ 5) $y = (x - 3)^2 + 2$ 3) $y = (x + 4)^2$
4. В одной и той же системе координат постройте графики функций:	
1) y = cos x 3) $y = 2\cos(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ 2) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ 4) $y = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x$	1) y = sin x 3) $y = 3\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2$ 2) $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 4) y = ctg 2x

Практическое занятие **№19**

«Исследование функций»

Цель работы.

Обобщение и систематизация навыков и умений выполнения преобразования графиков функций, вычисления значений функции, нахождения области определения функции.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы графиков функций.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Монотонность, четность, нечетность, ограниченность, периодичность.

2) Промежутки возрастания и убывания функции.

3) Наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума функции.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение. Функция $y = f(x)$ называется чётной, если для всех x из ее области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если для всех $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$

Пример 1. Определить, является ли функция чётной или нечётной $f(x) = x \cdot \sin x$

$f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = -x \cdot (-\sin x) = x \cdot \sin x = f(x) \Rightarrow f(x) -$ чётная

Определение. Функция *y = f(x)* называется периодической, если существует такое число T ≠ 0, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство

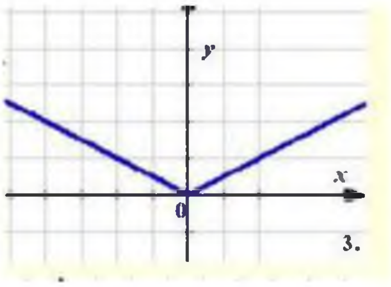
f (x -T) = f (x) = f (x + T). Число T называется периодом функции *f(x).*

Пример 2. Доказать, что функция $f(x) = \sin 3x$ периодическая с периодом $\frac{2\pi}{3}$

Доказательство: $f(x+T) = f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3x = f(x)$ $\Rightarrow$ функция периодическая.

Наименьший положительный период функции *y = sin x* и *y = cos x* равен 2π; наименьший положительный период функции *y = tg x* и *y = ctg x* равен π.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.



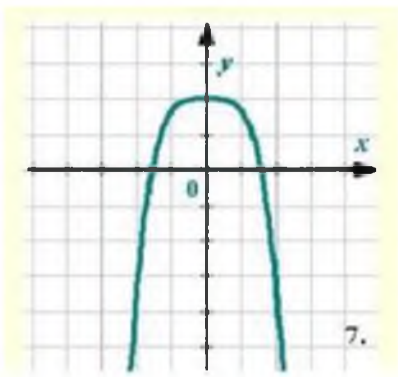
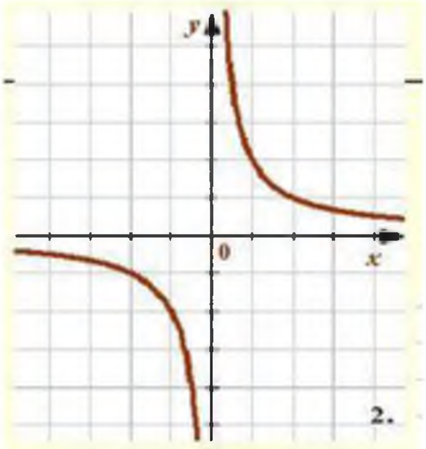
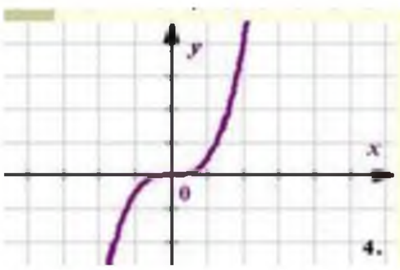
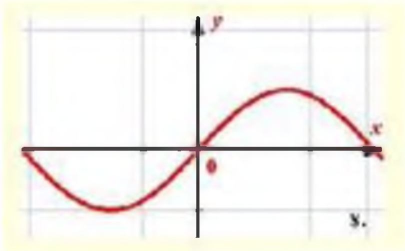


График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

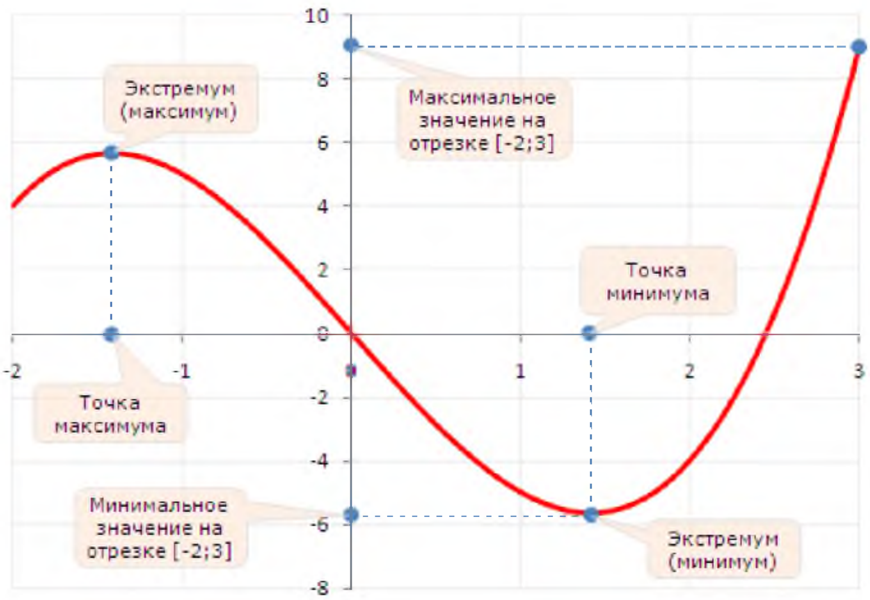






Определение. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на множестве Р, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется убывающей на множестве Р, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции.



Определение. Точка x_0 называется точкой *максимума* функции *(max)* , если для всех *x* из некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство: $f(x) \geq f(x_0)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой *минимума* функции *(min)*, если для всех *x* из некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство: $f(x) \leq f(x_0)$.

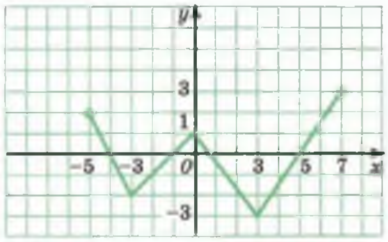
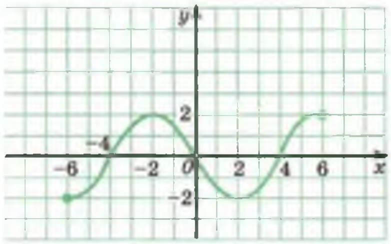
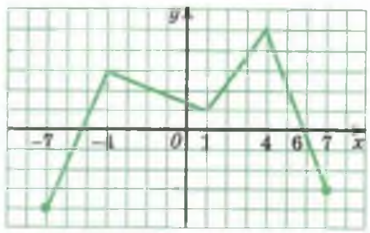
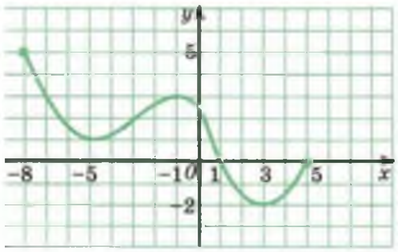
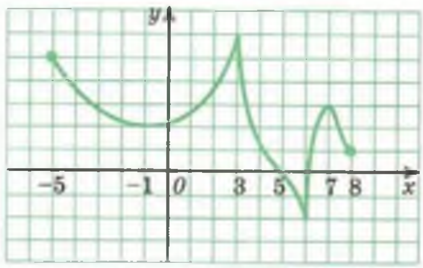
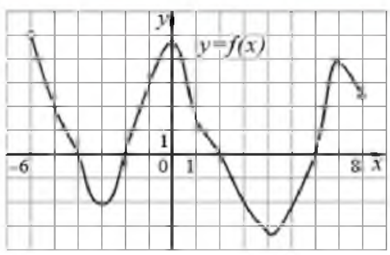
Точки максимума и минимума называют *точками экстремума.*

Схема исследования функции по графику

При исследовании функций целесообразно пользоваться следующей схемой.

1. Область определения и область значений функции.
2. Исследование функции на четность и нечетность.
3. Координаты точек пересечения графика с осями координат.
4. Промежутки возрастания и убывания функции.
5. Точки максимума и минимума функции, значения функции $f(x)$ в этих точках.
6. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

Варианты практической работы

Вариант	Определите, четной или нечетной является функция	Исследуйте функцию по схеме
1 вариант	$f(x) = 3x^2 + x^4$	
2 вариант	$f(x) = 5x^3 - \sin x$	
3 вариант	$f(x) = \frac{sin^2}{4-x^2}$	
4 вариант	$f(x) = \frac{x^4+1}{2x^3}$	
5 вариант	$f(x) = x^3 \sin^2 x$	
6 вариант	$f(x) = x^3 \cos 3x$	

Практическое занятие **№33 -34**

«Показательные уравнения и неравенства»

Цель работы.

Формирование умения решать показательные уравнения и неравенства.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы графиков функций.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Показательная функция, её свойства и график.

2) Основные виды показательных уравнений и методы их решения.

3) Показательные неравенства и методы их решения.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Показательная функция и её свойства

Определение. Показательной называется функция, заданная формулой вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 0$.

Свойства показательной функции

1. Областью определения показательной функции является множество R действительных чисел.
2. Множеством значений показательной функции является множество R+ всех положительных действительных чисел.
3. При a> 1 показательная функция возрастает на всей числовой прямой (рис.1), а при 0<a< 1 убывает (рис.2).

$a^{x_1} < a^{x_2}$, если $x_1 < x_2$, $(a > 1)$,

$a^{x_1} > a^{x_2}$, если $x_1 < x_2$, $(0 < a < 1)$

Геометрическая особенность графика показательной функции: ось x является горизонтальной асимптотой графика.

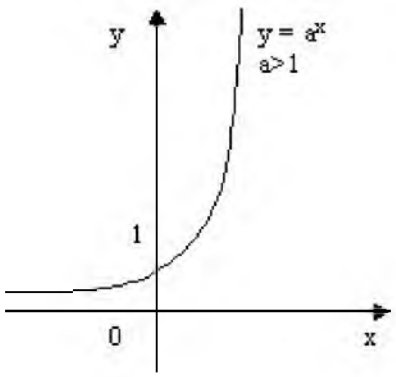


рис. 1

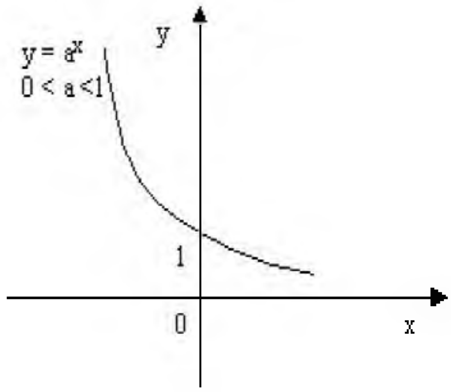


рис. 2

Показательными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

1) Простейшие уравнения, левую и правую части которых можно привести к одному основанию, решаются так:

Пример 1. $5^x = 625 \Rightarrow 5^x = 5^4 \Rightarrow x = 4$. *Ответ*: $x = 4$

2) Уравнения вида $2^x + 2^{x-1} - 2^{x-3} = 4$ решаются вынесением за скобки степени с наименьшим показателем.

3) Уравнения, сводящиеся к квадратному. Уравнения, вида $7^{2x} - 48 \cdot 7^x = 49$ решаются с помощью подстановки $a^x = y$.

Пример 2. Решить уравнение: $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$

$5^x = y$,

$5y^2 - 26y + 5 = 0$,

D = 169 – 25 = 144, $y_1 = 5$ $y_2 = 1/5$

$5^x = 5$ $x = 1$, $5^x = 1/5$ $x = -1$

Ответ: $x = 1$ и $x = -1$

4) Однородные показательные уравнения. При решения уравнения вида $a^x = b^x$ обе части уравнения необходимо разделить на b^x где $b^x \neq 0$

$$\frac{a^x}{b^x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Решение показательных неравенств сводится к решению простейших неравенств вида

$a^x < a^b$ или $a^x > a^b$

Если $a > 1$ и $a^x > a^b$, то $x > b$

Если $0 < a < 1$ и $a^x > a^b$, то $x < b$

Пример 3. Решить неравенство:

$$\left(\sqrt{5}\right)^{4-x} \geq \frac{1}{125}$$

$5^{(4-x)/2} \geq 5^{-3}$, $a = 5$, сравним показатели $(4 - x)/2 \geq -3$, $4 - x \geq -6$, $-x \geq -10$, $x \leq 10$

Ответ: $x \leq 10$

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Решить уравнение:

а) $8^x = 64$ в) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{16}{25}$ д) $4^x + 2^x - 20 = 0$

б) $2^{x+1} = 32$ г) $2^x + 5 \cdot 2^{x-1} = 56$

2. Решить неравенство:

а) $7^{x-2} > 49$ б) $\left(\frac{3}{4}\right)^x > 1\frac{1}{3}$ в) $2^{x^2-9} > 4^{4x}$

Вариант 2

1. Решить уравнение:

а) $5^x = 125$ в) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{32}{243}$ д) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

б) $3^{x-2} = 81$ г) $2 \cdot 3^{x+2} - 3^x = 51$

2. Решить неравенство:

а) $6^{x+1} = 36$ б) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \geq 27$ в) $3^{x^2-5x} > 9^{12}$

Практическое занятие **№35 -36**

«Логарифмические уравнения и неравенства»

Цель работы.

Формирование умения решать логарифмические уравнения и неравенства.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы графиков функций.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Логарифмическая функция, её свойства и график.

2) Свойства логарифмов.

2) Основные виды логарифмических уравнений и методы их решения.

3) Логарифмические неравенства и методы их решения.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Логарифмическая функция и ее свойства

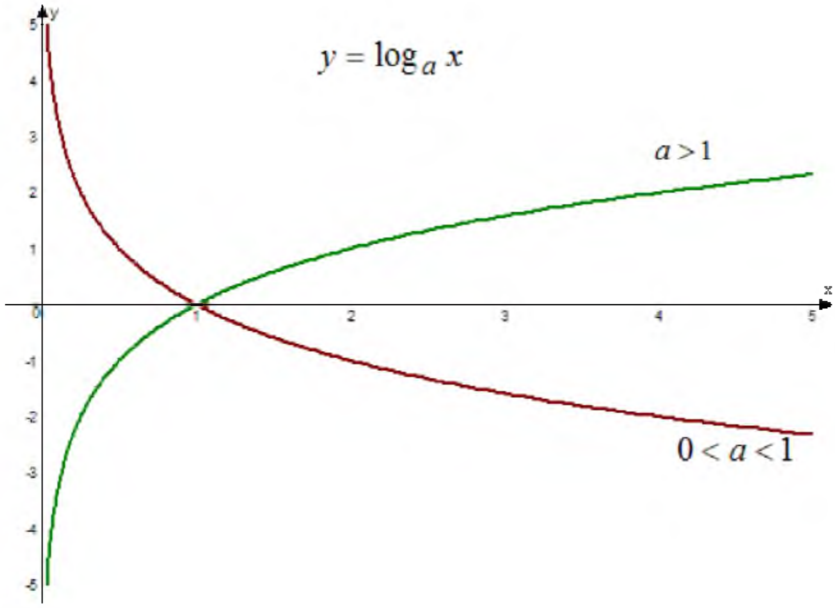
Определение. Логарифмической называют функцию вида: $y = loq_a\ x$. Логарифмическая функция обратная показательной.

Свойства логарифмической функции

1. Областью определения логарифмической функции является множество всех положительных чисел $D(f)=(0;+\infty)$.

2. Множество значений логарифмической функции множество R всех действительных чисел $E(f)=(-\infty;+\infty)$.

3. Логарифмическая функция при $a > 1$ возрастает и убывает при $0 < a < 1$.



Показательная и логарифмическая функции взаимно - обратные, то их графики симметричны относительно прямой $y = x$.

Свойства логаририфмов

При решении логарифмических уравнений полезно помнить некоторые **свойства логарифмов**:

$a^{log_a b} = b$ - основное логарифмическое тождество

$log_a 1 = 0$; $log_a a = 1$;

$log_a(xy) = log_a x + log_a y$; $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$;

$log_a x^n = n \cdot log_a x$; $log_a \sqrt[n]{x} = \frac{log_a x}{n}$;

$log_{a^n} b = \frac{1}{n} log_a b$; $log_a b = \frac{1}{log_b a}$;

$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$ - формула перехода к новому основанию

Определение. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма, называются логарифмическими.

Такие уравнения решаются с помощью определения логарифма, теорем о логарифмах и утверждения, что если положительные числа равны, то и равны их логарифмы при данном основании и обратно, если логарифмы чисел равны, то равны и соответствующие им числа.

При решении логарифмических уравнений необходимо учитывать ОДЗ. Все подлогарифмические выражения, а также основания логарифмов являются положительными и основания не равны 1. Однако можно избежать определения ОДЗ исходного уравнения, полученные решения необходимо проверить подстановкой их в данное уравнение и исключить посторонний корень. В большинстве случаев такой подход облегчает решение логарифмических уравнений.

Для решения простейшего логарифмического уравнения достаточно привести обе части к одинаковому основанию, а затем приравнять подлогарифмические выражения. Часто используется формула перехода от одного основания к другому.

$$log_2 x = 3 \Leftrightarrow log_2 x = log_2 8 \Leftrightarrow x = 8.$$

Виды логарифмических уравнений

1. Простейшие ($\log_2 x = 6$).
2. Простейшие с переменной в основании логарифма ($\log_x 27 = 3$).
3. Простейшие с переменной и в основании, и под логарифмом ($\log_x(x+2) = 2$).
4. Сводящиеся к простейшим с помощью использования свойств логарифмов ($\log_2 x + \log_x(x+2) = 3$).
5. Сводящиеся к квадратным($log^2{}_2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$).

Алгоритм решения простейших логарифмических уравнений

1.Уравнять основания логарифмов.

2.Приравнять подлогарифмические функции.

3.Выполнить проверку.

Пример 1.

$$\log_2(3x-6) = \log_2(2x-3)$$

Основания логарифмов равны, приравняем подлогарифмические выражения, с учетом ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x - 6 = 2x - 3 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases}$$

Найдем корень и подставим его в неравенство:

$$\begin{cases} x = 3 \\ 3 * 3 - 6 > 0, 9 - 6 > 0, 3 > 0 \end{cases}$$

Ответ: $x = 3$

Пример 2. $\log_2 x + \dfrac{4}{\log_x 2} = 5$

Найдем ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$

Воспользуемся свойством логарифма: $\dfrac{1}{\log_x 2} = \log_2 x$

Получаем: $\log_2 x + 4\log_2 x = 5$

Приведем подобные: $5\log_2 x = 5$; $\log_2 x = 1$, Преобразуем согласно определению логарифма: $x = 2^1 = 2$.Ответ: x=2

Пример 3. Решить уравнение $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$

$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3 \qquad 3 = \log_2 8$

$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = \log_2 8$

$(x+1)\cdot(x+3) = 8$

$x^2 + 4x + 3 = 8$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$x_1 = 1, \quad x_2 = -5$

Проверка

$x=1 \quad \log_2(1+1)+\log_2(1+3)=\log_2 2+\log_2 4=1+2=3$ - левая часть

3=3 $\Rightarrow$ $x = 1$ – корень уравнения

$x=-5 \quad \log_2(-5+1)+\log_2(-5+3)=\log_2(-4)+\log_2(-2)$ - левая часть не имеет смысла $\Rightarrow$

$x = -5$ не является корнем

Ответ: $x = 1$

Пример 4: $2^x = 3$

По определению логарифма имеем: $x = \log_2 3$

Пример 5: Решить уравнение: а) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$,

ОДЗ уравнения есть множество $x \in (0;+\infty)$. Обозначив $\lg x = t$ (тогда $\lg^2 x = (\lg x)^2 = t^2$), получим квадратное уравнение: $t^2 - 3t + 2 = 0$, решения которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$.

Следовательно, $\left[\begin{array}{l}\lg x = 1,\\ \lg x = 2,\end{array}\right.$

откуда $x_1 = 10$ и $x_2 = 100$.

Оба корня входят в *ОДЗ*.

При решении простейших логарифмических неравенств типа $\log_a x > \log_a b$ необходимо использовать следующее правило:

Если $a > 1$, то знак неравенства не меняется, т.е. $x > b$

Если $0 < a < 1$, то знак неравенства меняется на противоположный, т.е. $x < b$.

При решении логарифмических неравенств необходимо проверить, входит ли полученное решение в область определения неравенства.

Пример 6. Решить неравенство $\lg(x+1) \le 2$

$\lg(x+1) \le 2 \qquad 2 = \lg 100$

$\lg(x+1) \le \lg 100$

$a = 10, \quad a \succ 1 \quad \Rightarrow \quad x+1 \le 100$

$x \le 99$

Область определения: $x + 1 > 0$

$x > -1$

Общее решение: $\begin{cases} x \le 99, \\ x \succ -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -1 \le x \le 99$ *Ответ:* $-1 \le x \le 99$.

Варианты практической работы

Вариант 1	**Вариант 2**
1. Решите уравнение:	
1) $\log_3 x = 2$ 2) $\log_2(x-15) = 4$ 3) $\lg(2x)+\lg(x+3)=\lg(12x-4)$ 4) $\lg^2 x + 2\lg x = 8$ 5) $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$	1) $\log_4 x = 1$ 2) $\log_3(3x+2)=\log_3(x+4)$ 3) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$ 4) $\log_3^2 x = 4 - 3\log_3 x$ 5) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 = 0$
2. Решите неравенство:	
1) $\log_2 x \ge 4$ 2) $\log_{\frac{1}{2}} x \le -3$ 3) $\log_5 x > \log_5(3x-4)$	1) $\log_2 x \le 3$ 2) $\log_{\frac{1}{3}} x \le -3$ 3) $\log_{0,6}(2x-1) < \log_{0,6} x$

4) $\log_8\left(x^2-4x+3\right)<1$	4) $\log_6\left(x^2-3x+2\right)\geq 1$

Практическое занятие **№ 37 -38**

«Многогранники»

Цель работы.

Формирование и закрепление умений и навыков нахождения элементов призмы и пирамиды, площадей их поверхностей.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы многогранников, таблицы значений тригонометрических функций.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

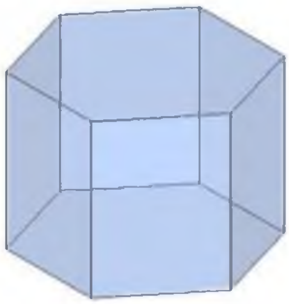
1) Призма. Правильная призма.
2) Параллелепипед. Куб.
3) Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида. Тетраэдр.
4) Площади поверхностей призмы и пирамиды.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение. Призма — многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.

Свойства призмы

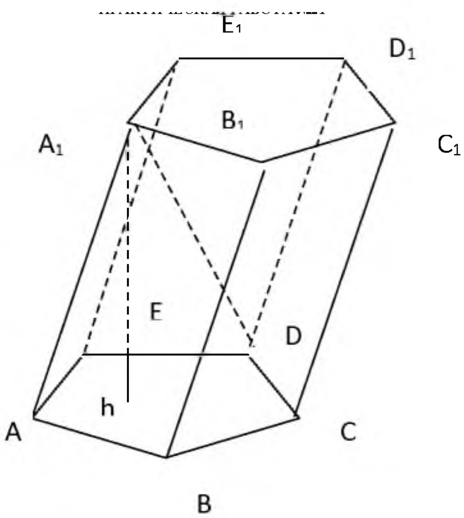


Основания призмы являются равными многоугольниками.
Боковые грани призмы являются параллелограммами.
Боковые ребра призмы параллельны и равны.

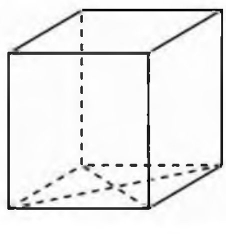
Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма является *прямой.* Высота прямой призмы равна её боковому ребру.

Прямая призма называется *правильной*, если её основания – правильные многоугольники.

У такой призмы все боковые грани – равные прямоугольники.



$ABCDE\ A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ – наклонная призма.
$ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ - основания призмы
ABB_1A_1 ... - боковые грани (параллелограммы)
AA_1, BB_1, … - боковые рёбра
h - высота призмы
$A_1\ D$ – диагональ призмы



Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади её боковой поверхности и площадей основания.

Площадь боковой поверхности прямой призмы S=PH, где P — периметр основания призмы, H— высота призмы.

Определение. Если основание призмы – параллелограмм, то она называется *параллелепипедом*.

Определение. Прямой параллелепипед, у которого в основании лежит прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*.
Теорема. В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его линейных измерений.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Определение. *Пирамида* – многогранник, основание которого – многоугольник, а остальные грани – треугольники, имеющие общую вершину.

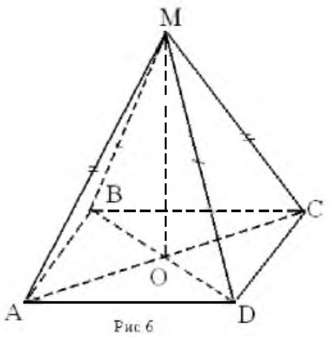


Рис 6

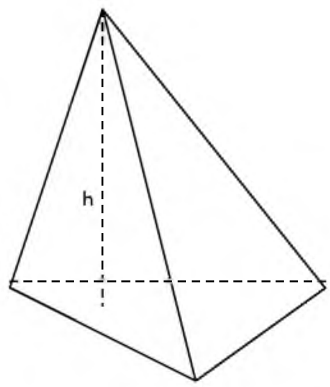
Стороны основания есть ребра основания. Прямые, соединяющие вершины основания с вершиной, есть боковые ребра.
MABCD – четырёхугольная пирамида
M – вершина пирамиды,
ABCD - основание,
MAB, MBC, MCD, MAD – боковые грани
MA, MB, MC, MD - боковые рёбра
MO - высота

Пирамида называется ***правильной***, если её основанием является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.

Все боковые рёбра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Определение. Высота боковой грани правильной пирамиды называется ***апофемой.***

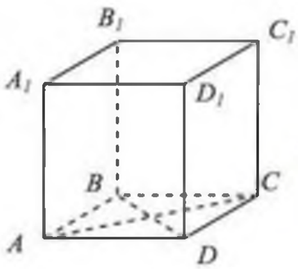
Тетраэдр - многогранник, гранями которого являются четыре треугольника. У тетраэдра 4 грани, 4 вершины и 6 рёбер. Тетраэдр, у которого все грани — равносторонние треугольники, называется *правильным*.

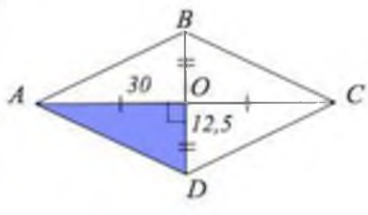


Боковой поверхностью пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.

Пример: Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 25 и 60, и боковым ребром, равным 25.
Решение: Площадь поверхности призмы $S=2S_{осн}+S_{бок}$
Площадь ромба $S=1/2d_1d_2$
Боковая поверхность данной прямой призмы – четыре равных прямоугольника.
Нам потребуется длина стороны ромба. Найдем ее по т. Пифагора из треугольника (по свойству ромба диагонали перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам):





Ответ: 4750.

Варианты практической работы
Вариант 1

I вариант	II вариант
1. Закончите утверждение	
1. Призмой называется многогранник, две грани которого … 2. Основания призмы……. 3. Прямоугольный параллелепипед – это …… 4. Пирамида – многогранник, у которого … 5. Правильная призма – призма, у ко-	1. Параллелепипед – призма, у которой … 2. Боковые ребра призмы...... 3. Боковая поверхность прямой призмы равна….. 3. Куб – многогранник, у которого … 4. Прямая призма – призма, у которой … 5. Правильная пирамида – пирамида, у кото-

торой …	рой …
2. Решите задачу:	
1) Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу треугольника, равна 26 см. Найти: а) высоту призмы; б) боковую; в) полную поверхность призмы. 2) Дана четырехугольная пирамида, основание которой – прямоугольник со сторонами 15 и 20 м. Боковые ребра равны 25 м. Найти высоту пирамиды. 3) Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: а) 3 дм, 4 дм, 2 дм.	1) Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник с гипотенузой 20 см и катетом 16 см. Диагональ боковой грани, содержащей второй катет треугольника равна 13 см. Найти: а) высоту призмы; б) боковую; в) полную поверхность призмы. 2) В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а апофема – 4 см. Найти боковое ребро пирамиды. 3) Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: а) 3 м, 9 м, 10 м.

Практическое занятие **№ 39 -40**

«Цилиндр. Конус»

Цель работы.

Формирование и закрепление умений и навыков нахождения элементов цилиндра и конуса (определение, элементы цилиндра, конуса, сечения цилиндра, конуса).

Формирование навыков решения типовых задач.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, тел вращения, таблицы значений тригонометрических функций.

План выполнения работы

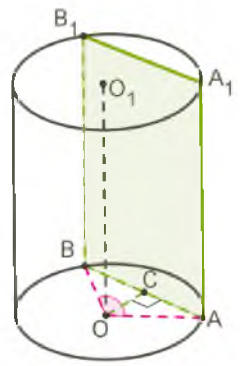
1. Повторение теоретического материала

1) Определение и элементы цилиндра и конуса.
2) Сечения цилиндра и конуса.
3) Усеченный конус.
4) Выполнение тренировочных упражнений.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Цилиндр



Определение. Цилиндр — тело вращения, которое получается в результате вращения прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Прямоугольник AOO_1A_1 вращается вокруг стороны OO_1.

OO_1 — ось симметрии цилиндра и высота цилиндра.

AA_1 — образующая цилиндра, длина которой равна длине высоты цилиндра.

AO — радиус цилиндра.

Полученная цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра, а круги — основаниями цилиндра.

Осевое сечение цилиндра — это сечение цилиндра плоскостью, которая проходит через ось цилиндра. Это сечение является прямоугольником.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра (т.е. перпендикулярной основанию), также получается прямоугольник. ABB_1A_1 — прямоугольник.

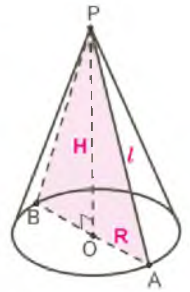
OA=AB=R — радиусы.

OC — расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.

Дуга AB равна центральному углу AOB.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной основанию, в сечении получаем круг, равный основаниям цилиндра.
Так как развёртка — прямоугольник, то боковая поверхность определяется по формуле:
$S_{бок}=2\pi R\cdot H$
Полная поверхность цилиндра определяется по формуле:
$S_{полн}=2\pi RH+2\pi R2=2\pi R\cdot(H+R)$

Конус



Определение: ***Конус*** — тело вращения, которое получается в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг его катета.

Треугольник POA вращается вокруг стороны PO.
PO — ось конуса и высота конуса.
P — вершина конуса.
PA — образующая конуса.
Круг с центром O — основание конуса. AO — радиус основания конуса.
Осевое сечение конуса — это сечение конуса плоскостью, которая проходит через ось PO конуса. Осевое сечение конуса — это равнобедренный треугольник. Треугольник APB — осевое сечение конуса.
∡PAO=∡PBO — углы между образующими и основанием конуса.
Развёрткой боковой поверхности конуса является круговой сектор. Длина дуги сектора —это длина окружности основания конуса длиной 2πR, угол развёртки боковой поверхности α.

1.Сделайте вычисления и заполните таблицу.

В цилиндре r – радиус основания, h – высота, l - образующая. Заполните таблицу.

Задание	**r**	**h**	**l**
1	1см		2см
2	12см	5см	
3		3м	5м

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, длина диагонали которого равна 20 см. Найдите высоту цилиндра.
2. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.
3. Образующая конуса равна 30 см, образует с плоскостью основания угол 30°. Найти высоту конуса.
4. Образующая конуса 13 см, а его высота – 12 см. Найдите радиус основания конуса.
5. Цилиндр пересечён плоскостью, параллельной оси и отсекающей от окружностей оснований дуги по 120°. Найти площадь сечения, если высота цилиндра равна 4 см, а радиус основания - $2\sqrt{3}$ см.

Вариант 2

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, длина диагонали которого равна 36 см. Найдите радиус основания цилиндра.
2. Высота цилиндра равна 12 см, а радиус основания 10 см. Цилиндр пересечён плоскостью, параллельной оси так, что в сечении цилиндра получается квадрат. Найти расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости.
3. Угол между образующей и осью конуса равен 45° , образующая равна 6,5 см. Найдите высоту и радиус конуса
4. Диаметр конуса равен 4 см, высота 6 см. Найдите образующую конуса.
5. Цилиндр пересечён плоскостью, параллельной оси и отсекающей от окружностей оснований дуги по 60°. Найти площадь сечения, если высота цилиндра равна 6 см, а радиус основания - 4см.

Практическое занятие **№ 41 -42**

«Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости»

Цель работы.

Формирование и закрепление умений и навыков нахождения элементов шара и сферы (определение, элементы).

Формирование навыков решения типовых задач.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы тел вращения, таблицы значений тригонометрических функций.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Шар и сфера (определение и элементы).

2) Сечения шара и сферы.

3) Касательная плоскость к сфере.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Шар, сфера

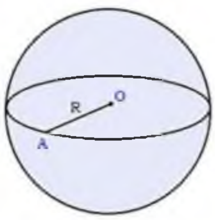
Определение. Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки.

Поверхность шара называется ***сферой.***

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара, называется **большим кругом**.

Для упрощения обычно рисуется не шар, а большой круг шара.



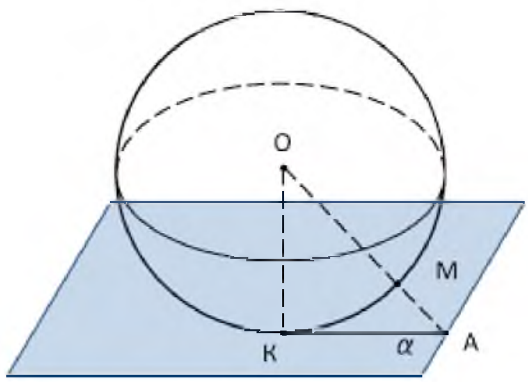
AO = R – радиус шара.

Касательная плоскость к шару

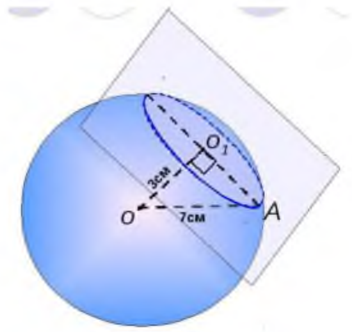
Касательная плоскость к шару имеет с шаром только одну общую точку – точку касания.

ОК = R – радиус шара или расстояние от центра шара до касательной плоскости.

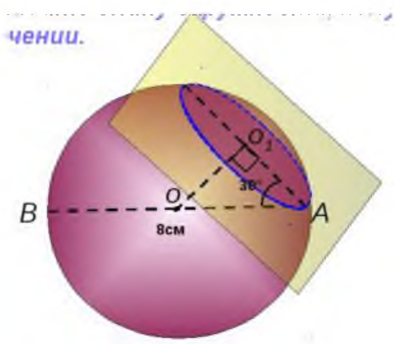
К – точка касания.



Секущая плоскость



Пример 1. Расстояние от центра шара радиуса 7 см до секущей плоскости равно 3 см. найдите площадь сечения.
$r^2 = R^2 – d^2 = 7^2 – 3^2 = 49 – 9 = 40$
$S = \pi r^2 = 40\pi$ см^2



Пример 2. Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы, равного 8см так, что угол между диаметром и плоскостью равен 30°. Найдите длину окружности, получившейся в сечении.
В сечении будет окружность, длина которой $l = 2\pi r$.
Если $R > d$, то секущая плоскость и сфера пересекаются по окружности радиуса $r = R \cos 30^\circ$, где $R = \frac{1}{2} d = 4$ см.

$r = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $l = 4\sqrt{3}\pi$.

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Шар, радиус которого равен 10 см, пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 см от центра. Найдите площадь сечения.
2. Радиус сферы равен 112 см. Точка, лежащая на плоскости, касательной к сфере, удалена от точки касания на 15 см. Найдите расстояние от этой точки до центра сферы.
3. Радиус шара равен 6 см. Через конец радиуса под углом 60° к нему проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения шара плоскостью.
4. Каждая сторона ромба касается сферы радиуса 10 см. Плоскость ромба удалена от центра сферы на 8 см. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 12,5 см.

Вариант 2

1. Сфера радиуса 10 см пересечена плоскость на расстоянии 8 см от центра. Найдите длину окружности, получившейся в сечении.
2. Через конец радиуса шара проведена плоскость, составляющая с ним 30°. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью, если радиус шара равен 6 см.
3. Дан шар с центром в точке O, α - касательная плоскость, точка A - точка касания, точка B лежит на плоскости α, AB = 21 см, BO = 29 см (рис. 10). Найдите радиус шара.
4. Стороны ромба касаются сферы радиуса 13 см. Найдите расстояние от плоскости ромба до центра сферы, если диагонали ромба равны 30 см и 40 см.

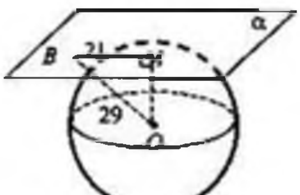


Рис. 10

Практическое занятие **№ 43 -44**

«Объемы и площади поверхностей многогранников и тел вращения»

Цель работы.

Обобщение и систематизация знаний по нахождению объемов и площадей поверхностей многогранников и тел вращения.

Формирование навыков решения типовых задач.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы многогранников и тел вращения, таблицы значений тригонометрических функций.

План выполнения работы

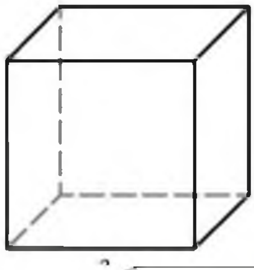
1. Повторение теоретического материала

1) Объемы и площади поверхностей многогранников.
2) Объемы и площади поверхностей цилиндра и конуса.
3) Объема шара и площадь сферы.
4) Объемы подобных тел.

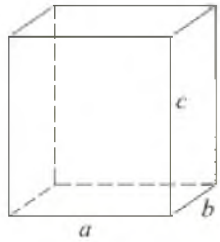
2. Выполнение практической работы

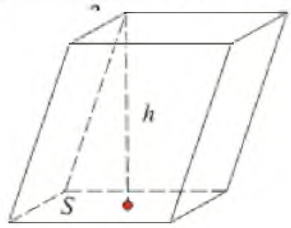
Теоретические сведения и методические рекомендации

1. ***Объём куба*** вычисляется по формуле: $V = a^3$,
где *a* – ребро куба.

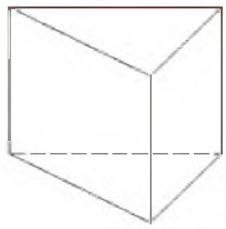


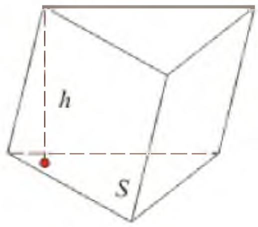
2. ***Объём прямоугольного параллелепипеда*** вычисляется по формуле: $V = a \cdot в \cdot c$,
где а, в, с – измерения прямоугольного параллелепипеда (длина, ширина, высота)





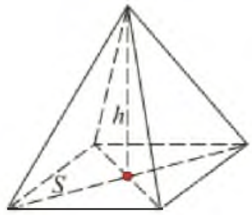
3. ***Объём призмы*** равен $V = S_{осн} \cdot h$





4. ***Объём пирамиды*** вычисляется по формуле: $V = \frac{1}{3} S\ h$,

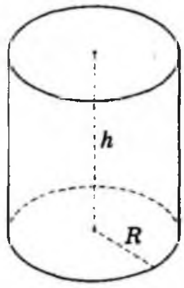
где S – площадь основания, h - высота



5. ***Объём цилиндра*** вычисляется по формуле: $V = S_{осн} \cdot h = \pi r^2 h$

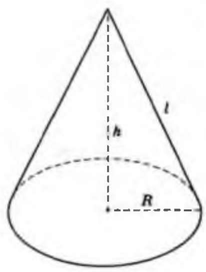
Так как развёртка — прямоугольник, то боковая поверхность определяется по формуле: $S_{бок}=2\pi R \cdot H$

Полная поверхность цилиндра определяется по формуле:



$S_{пэлн}=2\pi RH+2\pi R2=2\pi R\cdot(H+R)$

6. ***Объём конуса*** вычисляется по формуле: $V = \frac{1}{3} S\ h$,



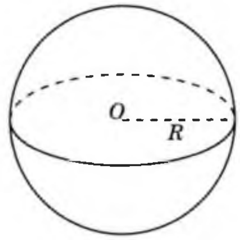
где S – площадь основания, h – высота.

Площадь поверхности конуса равна $S_{кон.} = S_{бок.} + S_{осн.}$

$S_{бок.} = \pi \cdot r \cdot l \qquad S_{осн.} = \pi \cdot r^2$

$S_{кон.} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(r + l)$

7. ***Объём шара равен:*** $V = \frac{4}{3} \pi R^3$



Площадь поверхности шара (т.е. сферы) вычисляется по формуле
S(сферы)= $4\pi \cdot R^2$, где R — радиус шара.

Объемы подобных тел относятся как кубы их линейных размеров.

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Найдите объем правильной треугольной призмы, сторона основания которой 4 см, а боковое ребро 4 см.
2. Найдите объем и площадь поверхности цилиндра с высотой, равной 3см и диаметром основания – 6см.
3. Найти объем и площадь поверхности конуса, если его образующая равна 17 см, а высота – 15 см.
4. Объем цилиндра равен 80π $м^3$. Чему равна высота, если радиус основания равен 4 дм?
5. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 см. и 8 см. Все боковые ребра равны 13 см. Найдите объём площадь поверхности пирамиды.

Вариант 2

1. Основанием прямой призмы является треугольник, у которого стороны равны 5 см и 6 см и образуют угол в 30°, её боковое ребро равно 4 см. Найдите объем призмы.
2. Найти объем и площадь поверхности конуса с диаметром 6 см и высотой 5 см.
3. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 10 см, а боковое ребро – 13 см. Найдите объём и площадь поверхности пирамиды.
4. Прямоугольник со сторонами 4 см и 5 см вращается около меньшей стороны. Найдите объём и площадь поверхности тела вращения.
5. Объем цилиндра равен 100π $м^3$. Чему равен радиус основания, если высота равна 4 м?

Практическое занятие **№ 1**

«Числовая последовательность, вычисление членов последовательности»

Цель работы.

Обобщение и систематизация знаний по данной теме; формирование навыков решения типовых задач.

Оборудование: инструкционно-технологические карты.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Способы задания и свойства числовых последовательностей. Предел последовательности.
2) Суммирование последовательностей.
3) Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

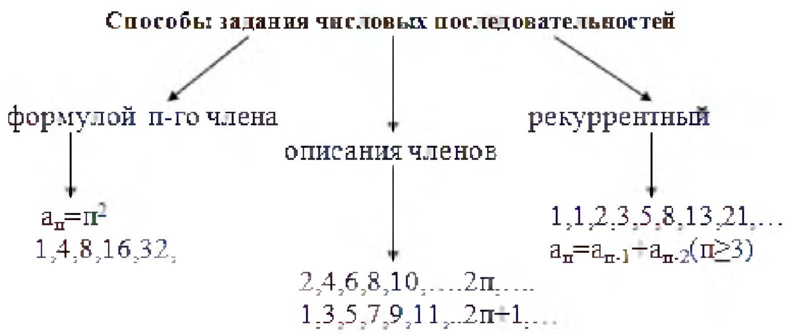
Функции, область определения которых является множеством натуральных чисел или его частью, называются ***числовыми последовательностями.***

Общий вид последовательности, это (a_n) или $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$.

a_n называется общим членом последовательности или n-ым членом, где n - порядковый номер члена последовательности.

Последовательность возможно задать, указав все её члены или указав общую формулу. Формула показывает, как найти любой член последовательности, если известен порядковый номер n.

Числовую последовательность считаются заданной, если мы можем указать любой член последовательности.



Пример 1. Напишите первые пять членов последовательности $X_n=3n^2+2n+1$

n=1, $x_1=3*1^2+2*1+1=3+2+1=6$

n=2, $x_2=3*2^2+2*2+1=3*4+4+1=12+5=17$

n=3, $x_3=3*3^2+2*3+1=27+6+1=34$

n=4, $x_4=3*4^2+2\text{-}4+1=3*16+8+1=48+9=57$

n=5, $x_5=3*5^2+2*5+1=3*25+10+1=75+11=86$

Ответ: 6,17,34,57,86…….

Пример 2. Напишите формулу общего члена последовательности натуральных чисел, кратных 3.

Ответ: 0,3,6,9,12,15,.... 3n, a_n =3n

Если каждый член последовательности (a_n), начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, то такая последовательность называется ***арифметической прогрессией***. Число d получило название *разности прогрессии*.

Арифметическая прогрессия задана равенством: $a_{n+1} = a_n + d$.

1. *Формула n-го члена арифметической прогрессии*: $a_n = a_1 + d(n – 1)$
2. *Формулы суммы n первых членов* арифметической прогрессии:

а) $S_n = ((a1 + an)/2) \cdot n;$

б) $Sn = ((2a1 + d(n – 1))/2) \cdot n.$

3. *Характеристическое свойство* арифметической прогрессии: последовательность является арифметической последовательностью тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего в случае конечной арифметической прогрессии), равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов:

$$a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) / 2.$$

Если первый член последовательности (b_n) отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q, то такая последовательность называется ***геометрической прогрессией***.

Число q получило название *знаменателя прогрессии*.

Геометрическая прогрессия задана равенством $b_{n+1} = b_n \cdot q$

1. *Формула n-го члена* геометрической прогрессии: $b_n= b_1 \cdot q^{n-1}$.
2. *Формулы суммы первых n членов* геометрической прогрессии:

а) $S_n = (b_nq – b_1) / (q – 1);$

б) $S_n = (b_1(q^n – 1)) / (q – 1).$

3. *Характеристическое свойство* геометрической прогрессии: последовательность является геометрической последовательностью тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего в случае конечной геометрической прогрессии), связан с предыдущим и последующим членами формулой:

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$

Бесконечно убывающей геометрической прогрессией называется бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой удовлетворяет условию |q| < 1.

Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S_n = b_1 / (1 – q).$$

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Составьте возможную формулу n-го элемента последовательности (y_n), если последовательность имеет вид: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
2. Выписать первые десять элементов последовательности заданной рекуррентно:
$y_1=1$, $y_2=3$, $y_n=y_{n-2}+y_{n-1}$.
3. Найдите формулу n-го элемента и сумму первых 15 элементов арифметической прогрессии с первым элементом 3,4 и разностью 0,9.
4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 3,5 и знаменателем $-\frac{2}{3}$.
5. В арифметической прогрессии $a_5= -150$, $a_6= -147$. Найдите номер первого положительного элемента этой последовательности.
6. Укажите наиболее близкий к нулю элемент арифметической прогрессии 22,7; 21,4; ... .

Вариант 2

1. Составьте возможную формулу n-го элемента последовательности (y_n), если последовательность имеет вид: 7, 11, 15, 19, 23, ...
2. Выписать первые десять элементов последовательности заданной рекуррентно:
$y_1=0$, $y_2=1$, $y_n=2y_{n-2}+y_{n-1}$.
3. Найдите формулу n-го элемента и сумму первых 15 элементов арифметической прогрессии с первым элементом 3,5 и разностью 0,8.
4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 4,5 и знаменателем $-\frac{2}{3}$.
5. В арифметической прогрессии $a_5 = 160$, $a_6= 156$. Найдите номер первого отрицательного элемента этой последовательности.
6. Укажите наиболее близкий к нулю элемент арифметической прогрессии -15,1; -14,4; ...

Практическое занятие **№ 45 -46**

«Правила и формулы дифференцирования. Уравнение касательной»

Цель работы.

Обобщение и систематизация знаний дифференцирования элементарных функций, применение правил и формул дифференцирования.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблица производных элементарных функций.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Определение производной функции.
2) Правила вычисления производных.
3) Производные основных элементарных функций.
4) Уравнение касательной к графику функции.
5) Производная сложной функции.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в заданной точке x называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, т.е.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Правила вычисления производных:

$$C' = 0$$
$$(Cu)' = Cu'$$
$$(u + v)' = u' + v'$$
$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Таблица производных основных элементарных функций:

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^2)' = 2x$
4. $(x^3)' = 3x^2$
5. $(x^n)' = n x^{n-1}$
6. $(e^x)' = e^x$
7. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
8. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
9. $(kx + b)' = k$
10. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
11. $(\sin x)' = \cos x$
12. $(\cos x)' = -\sin x$
13. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
14. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
15. $(a^x)' = a^x \cdot \ln x$
16. $(\log x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$
17. $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
18. $f'(kx + b) = k \cdot f'(kx + b)$

Пример 1. Найти производную функции $y = x^2 - 5x$.

Применяя линейные правила дифференцирования, получаем:

$y'(x) = (x^2 - 5x)' = (x^2)' - (5x)' = (x^2)' - 5(x)' = 2x - 5 \cdot 1 = 2x - 5$.

Пример 2. Найти производную функции $y = 2\sqrt{x} - 3\sin x$.

Используя простейшие правила дифференцирования, получаем: $y'(x) = (2\sqrt{x} - 3\sin x)' = (2\sqrt{x})' -$ $- 3(\sin x)' = 2(\sqrt{x})' - 3(\sin x)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3\cos x = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3\cos x$.

Пример 3. Найти производную функции:

$(x^2 \cdot \cos x)' = (x^2)' \cdot \cos x + x^2 \cdot (\cos x)' = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x$.

Пример 4. Найти производную функции: $\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \frac{(x)' \cdot \sin x - x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{1 \cdot \sin x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$

Пример 5. Найти производную функции: $y = \sin(3x - 5)$

$y' = (\sin(3x - 5))' = \cos(3x - 5) \cdot (3x - 5)' = \cos(3x - 5) \cdot (3 - 0) = 3\cos(3x - 5)$

Пример 6. Найти производную функции: $y = (2x + 1)^5$

$y' = ((2x + 1)^5)' = 5 \cdot (2x + 1)^4 \cdot (2x + 1)' = 5 \cdot (2x + 1)^4 \cdot (2 + 0) = 5 \cdot (2x + 1)^4 \cdot 2 = 10 \cdot (2x + 1)^4$.

Геометрический смысл производной:

Производная функции *f(x)* в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой к графику функции в этой точке.

$f'(x_0) = tg\,\alpha = k$

Алгоритм составления уравнения касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой x_0.
2. Вычислить $f(x_0)$.
3. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(x_0)$.
4. Подставить найденные значения в формулу.

Варианты практической работы

1 вариант	**2 вариант**
1. Найти производные функций:	
1) $y = x^2 - 7x$ 2) $y = x^5 + 2x$ 3) $y = 7x^2 + 3x$ 4) $y = 15x + \sqrt{x}$ 5) $y = 10x^2 + \frac{1}{x}$ 6) $y = \sin x + 3$ 7) $y = -2x^2 - \frac{1}{x}$ 8) $y = -2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$ 9) $y = \frac{x^3}{2x+4}$ 10) $y = \frac{\sin x}{x}$ 11) $y = \sqrt{x} \cdot \cos x$ 12) $y = \cos x \cdot \sin x$ 13) $y = \sqrt{x} \cdot e^x$ 14) $y = \frac{4x^2+1}{2x - x^4}$ 15) $y = (2x^2 - 3x + 5)^6$	1) $y = x^4 - 3x$ 2) $y = x^3 - x^5$ 3) $y = 4x^4 - 6x$ 4) $y = 16x - 2\sqrt{x}$ 5) $y = 2x^3 - \frac{1}{x}$ 6) $y = 2\cos x - 4x^2$ 7) $y = -4x^4 - \frac{3}{x}$ 8) $y = -3\sqrt{x} + \frac{1}{14}x^7$ 9) $y = \frac{x^2}{3-4x}$ 10) $y = \frac{\cos x}{x}$ 11) $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$ 12) $y = tgx \cdot e^x$ 13) $y = \sin x \cdot (x^3 + 2x)$ 14) $y = \frac{x^3+2x^6}{3x - x^5}$ 15) $y = (x^2 + 7x - 2)^3$
2. Решить уравнение $f'(x) = 0$, если	
$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$	$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 3$
3.Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:	
$f(x) = x - 3x^2$ $x_0 = 2$	$f(x) = x^3 + 27$ в точке $x_0 = 2$

Практическое занятие **№ 37 -48**

«Исследование функций с помощью производной»

Цель работы.

Формирование умения применения производной для исследования функций и построения графиков функций.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблица производных элементарных функций.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Правила вычисления производных.
2) Производные основных элементарных функций.
3) Производная сложной функции.
4) Признаки возрастания и убывания функции.
5) Определение критических точек.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Монотонность функции

Определение. Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на отрезке $[a,b]$ если для любых $x_1<x_2$ из отрезка выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.В случае выполнения нестрогого неравенства $f(x_1)\le f(x_2)$ функция называется **неубывающей** на отрезке.

Определение. Функция $f(x)$, называется **убывающей** на отрезке $[a,b]$ если для любых $x_1<x_2$ из отрезка выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$. В случае выполнения нестрогого неравенства $f(x_1)\ge f(x_2)$ функция называется **невозрастающей** на отрезке.

Если функция является убывающей или возрастающей, то она называется **монотонной функцией**.

Пример: функция $y=\ln x$ является возрастающей.

Пример: функция $y=-3x+2$ является убывающей.

Точки экстремума

x_0 — **точка максимума** функции $f(x)$, если для всех достаточно близких точек x верно неравенство $f(x)\le f(x_0)$.

x_0 — **точка минимума** функции $f(x)$, если для всех достаточно близких точек x верно неравенство $f(x)\ge f(x_0)$.

Точка экстремума — это точка максимума либо точка минимума функции.

Признак возрастания и убывания функции

Функция $f(x)$ **возрастает** на промежутке $(a;b)$, если производная $\mathbf{f'(x)>0}$ на этом промежутке.

Функция $f(x)$ **убывает** на промежутке $(a;b)$, если производная $\mathbf{f'(x)<0}$ на этом промежутке.

Признаки максимума и минимума функции

Если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 является точкой максимума функции.

Если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 является точкой минимума функции.

Критическая точка- точка, в которой производная функции равна нулю или не существует.

Три типа критических точек:

x_1 – точка локального минимума, является точкой экстремума;

x_2 – точка перегиба, НЕ является точкой экстремума.

x_3 – точка локального максимума, является точкой экстремума;

Схема исследования функции и построение её графика.

1. Найдите область определения функции.
2. Исследуйте функцию на четность или нечетность.
3. Найдите промежутки знакопостоянства.
4. Найдите промежутки монотонности функции, её экстремумы.
5. Найдите промежутки выпуклости графика функции, её точки перегиба.
6. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Постройте график функции, используя полученные результаты исследования.

Алгоритм нахождения точки максимума и минимума функции

1. Найдите производную функции
2. Найти нули производной
3. Найдите точки экстремума
   - Используйте метод интервалов, чтобы определить знаки производной;
   - В точке минимума производная равна нулю и меняет знак с минуса на плюс, а в точке максимума – с плюса на минус.

Пример. Найти точку максимума функции $y=x^3-243x+19$.

1) Найдем производную: $y'(x)=(x^3-243x+19)'=3x^2-243$;

2) Решим уравнение $y'(x)=0$: $3x^2-243=0\Leftrightarrow x^2=81\Leftrightarrow x_1=-9, x_2=9$;

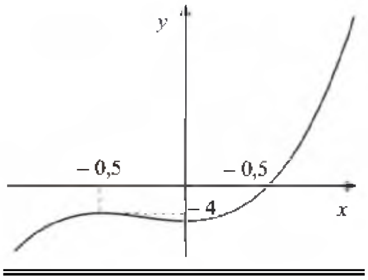
3) Производная положительная при $x>9$ и $x<-9$ и отрицательная при $-9<x<9$. Поэтому $x=-9$ — точка максимума.

Пример. Построить график функции $y=16x^3+12x^2-5$ с помощью производной.

Найдем производную. $y' = 48x^2 + 24x$ определены на всей числовой оси x.
Решим уравнение $48x^2 + 24x = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}5$, методом интервалов определим, что производная положительна на интервалах $x < -0{,}5$ и $x > 0$, отрицательна при $-0{,}5 < x < 0$. Следовательно, функция строго возрастает на первых двух интервалах и строго убывает на последнем. Она имеет локальный максимум y (–0,5) = – 4 и локальный минимум y (0) = –5.

Полученные данные позволяют нарисовать график.

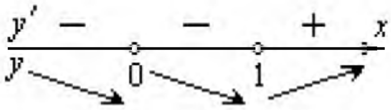
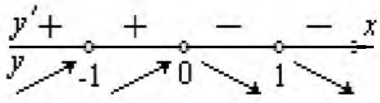
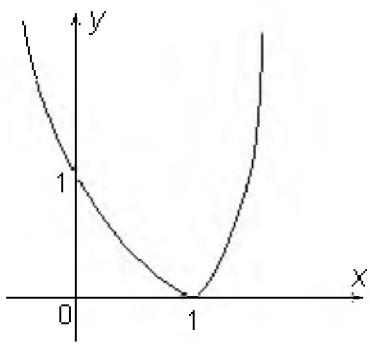
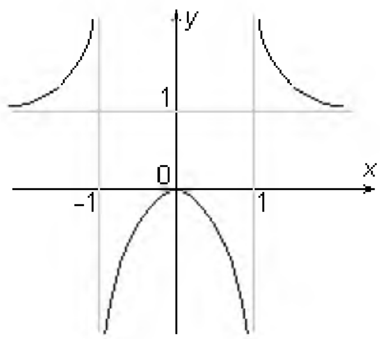


Обучающая таблица

Задание. Исследуйте и постройте графики функции:

а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$; б) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

№ шага	План исследования Функции	Применение плана	
		а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$	б) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$
1	Находим область определения функции	$D(f) = R$	$x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$, $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup$ $\cup (1; +\infty)$
2	Исследуем функцию на четность, нечетность	$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 + 1 \neq \pm f(x)$ $\Rightarrow$ функция ни четная, ни нечетная	$f(-x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = f(x)$ $\Rightarrow$ функция четная
3	Находим нули (корни) функции и промежутки её знакопостоянства	$3x^4 - 4x^3 + 1 = 0$, $(3x^4 - 3x^3) - (x^3 - 1) = 0$, $(x - 1)^2(3x^2 + 2x + 1) = 0$, $x - 1 = 0$, $x = 1$ - нуль функции	$\dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 0$, $x = 0$ - нуль функции -1 0 1 x y>0 y<0 y<0 y>0
4	Находим производную функции и её критические точки	$f'(x) = (3x^4 - 4x^3 + 1)' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0; 1$ - критические точки функции	$f'(x) = \left(\dfrac{x^2}{x^2 - 1}\right)' = \dfrac{2x(x^2 - 1) - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ - критическая точка функции

5	Находим промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции	 $y'(-1)<0, y'(0{,}5)<0, y'(2)>0$ *x*=0 – не является точкой экстремума, *x*=1 – точка минимума, $y_{min}=y(1)=0$	 $y'(-2)>0, y'(-0{,}5)>0,$ $y'(0{,}5)<0, y'(2)<0,$ *x*=0 – точка максимума, $y_{max}=y(0)=0$
6	Находим предел функции при $x\to\pm\infty$	$\lim\limits_{\Delta x\to\pm\infty}\left(3x^4-4x^3+1\right)=\infty$	$\lim\limits_{\Delta x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1$
7	Строим эскиз графика функции		

Варианты практической работы

Вариант 1	**Вариант 2**
1. Исследуйте функцию на максимум и минимум:	
а) $f(x) = 2x^3+3x^2-2$ б) $f(x)=\dfrac{x}{2}-x^4$	а) $f(x) = 3x^3+4x^2-5$ б) $f(x)=x^3-3x$
2. Используя данные о производной y ′, приведенные в таблице, ответить на вопросы: а) промежутки возрастания; б) промежутки убывания; в) точки максимума; г) точки минимума.	

Вариант 1:

x	(-∞;-5)	-5	(-5;-2)	-2	(-2;8)	8	(8;+∞)
y'	+	0	-	0	+	0	+

Вариант 2:

x	(-∞;-2)	-2	(-2;1)	1	(1;5)	5	(5;+∞)
y'	-	0	+	0	+	0	-

3. Исследуйте с помощью производной функцию и постройте ее график:	
а) $y=x^3-3x^2+4$ б) $y=1+2x^2-x^4$	а) $y=2+3x-x^3$ б) $y=x^4-2x^2+2$

Практическое занятие **№ 4 9 -50**

«Нахождение наибольшего, наименьшего и экстремальных значений функции»

Цель работы.

Формирование умения нахождения наибольшего, наименьшего и экстремальных значений функций.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблица производных элементарных функций.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Определение критических точек.

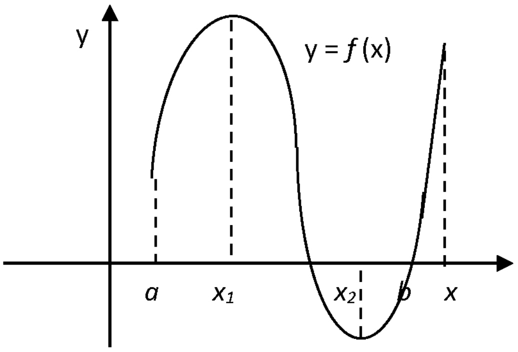
2) Признаки возрастания и убывания функции.

3) План нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
4) Правила и формулы вычисления производных.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

На практике часто приходится решать задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции на отрезке.



Наибольшее $f(x_2)$, наименьшее $f(x_2)$

x_1, x_2 – стационарные точки

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке [a; b] нужно:

1) найти значение функции на концах отрезка, т.е . *f(a) и f(b);*
2) найти критические точки функции;
3) найти значения функции в тех критических точках, которые принадлежат интервалу (*a;b*);
4) из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечание: Если на (*a, b*) нет стационарных точек, то наибольшее и наименьшее значения функция принимает на концах отрезка [*a*; *b*].

Обучающая таблица

Задание. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 - 3$ на промежутке $[0;2]$.

№ шага	План нахождения y_{min} и y_{max} на $[a;b]$	Применение плана
1	Находим производную функции	$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$
2	Находим критические точки функции	$y' = 0$, $4x(x^2 - 1) = 0$, $x = 0$ или $x^2 - 1 = 0$, $x = -1; 0; 1$ - критические точки функции
3	Выбираем критические точки, лежащие внутри $[a;b]$	$0;1 \in [0;2]$
4	Находим значения функции в критических точках (внутри данного отрезка) и на концах отрезка	$y(0) = -3$ $y(1) = 1 - 2 - 3 = -4$ $y(2) = 16 - 8 - 3 = 5$
5	Из найденных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее	$y_{min} = y(1) = -4$, $y_{max} = y(2) = 5$

Пример1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = -2x^3 - 3x^2 + 4$ на отрезке [-2; 1].

1) $y(-2) = 16 - 12 + 4 = 8$ $\qquad y(1) = -2 - 3 + 4 = -1$

2) $y'(x) = -6x^2 - 6x$ $\quad y' = 0$ при $x = 0$ и $x = -1$

$x = 0 \in (-2;1) \Rightarrow y(0) = 4$

$x = -1 \in (-2;1) \Rightarrow y(-1) = 2 - 3 + 4 = 3$

$\max\limits_{[-2;1]} y(x) = y(-2) = 8 \quad \min\limits_{[-2;1]} y(x) = y(1) = -1$

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на интервале (a ;b):

Если функция дифференцируема на интервале (a ; b) и имеет только одну стационарную точку x_0: это либо точку максимума, либо точку минимума, тогда

если x_0 - точка максимума, то функция в этой точке принимает наибольшее значение;

если x_0 - точка минимума, то функция в этой точке принимает наименьшее значение.

Пример 2. Число 36 записать в виде произведения 2-х положительных чисел, сумма которых наименьшая.

Пусть первый множитель равен x, тогда второй множитель равен $\frac{36}{x}$.

Сумма этих чисел равна $x+\frac{36}{x}$. По условию задачи x – положительное число. Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x) = x+\frac{36}{x}$ принимает наименьшее значение на интервале $x > 0$.

Найдём производную: $f'(x) = \left(x+\frac{36}{x}\right)' = 1-\frac{36}{x^2} = \frac{(x+6)\cdot(x-6)}{x^2}$

Стационарные точки: $x_1 = 6$ и $x_2 = -6$. На интервале $x > 0$ есть только одна стационарная точка x= 6.

При переходе через точку x = 6 производная меняет знак с « - » на « + », и поэтому точка x = 6 – точка минимума. Следовательно, наименьшее значение на интервале $x > 0$ функция $f(x) = x+\frac{36}{x}$ принимает в точке $x = 6$. Это значение $f(6) = 12$

Ответ: $36 = 6 \cdot 6$

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3+3x^2-36x$ на [-4; 3]

1) $f(-4) = -128+48+144 = 64$

$f(3) = 54+27-108 = -27$

2) $f'(x) = 6x^2+6x-36$

$x^2+x-6=0$

$x_1 = -3 \;\; x_2 = 2$ - $\in$ (-4; 3)

$f(-3) = -54+27+108 = 81$

$f(2) = 16+12-72 = -44$

Ответ: $\max\limits_{[-4;3]} f(x) = f(-3) = 81 \qquad \min\limits_{[-4;3]} f(x) = f(2) = -44$

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

а) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на [0; 3];

б) $f(x) = \sin 2x - x$ на [-π/2; π/2].

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на интервале: $y = 1 - x^4 + x^5$ на (-3; 3).

3. Разложить число 100 на 2 слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

4. Площадь прямоугольника составляет 64 см^2. Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьший?

Вариант 2

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ на [-2; 2];

б) $f(x) = \cos 2x + 2x$ на [-π; π].

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на интервале: $y = \frac{2}{x} - x^2$ на (-∞; 0).

3. Разность двух чисел равна 10. Найти эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

4. Площадь прямоугольника составляет 16 см^2. Каковы его размеры, если периметр принимает наименьшее значение?

Практическое занятие **№ 5 1 -52**

«Вычисление первообразных функций»

Цель работы.

Обобщение и систематизация знаний по вычислению первообразных функций.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных и интегралов основных функций.

1. Повторение теоретического материала

1) Определение первообразной.
2) Основное свойство первообразной.
3) Три правила нахождения первообразных
3) Формулы нахождения первообразных функций.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение. Функция F (x) называется первообразной для функции f (x) на данном промежутке, если для любого x из данного промежутка F'(x)= f (x).

Первообразная – первичный образ функции.

Основное свойство первообразных

Любая первообразная для функции f(x) на промежутке *I* записывается в виде F(x) + C, где F (x) – одна из первообразных функции f (x) на промежутке *I*, а C –произвольная постоянная.

Геометрическая интерпретация.

Графики всех первообразных данной функции f (x) получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельным переносом вдоль оси Oy.

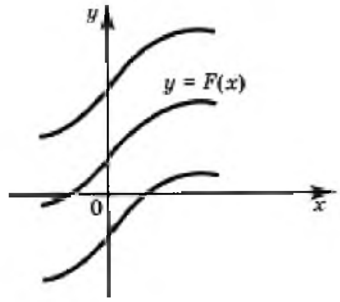


Таблица первообразных

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
a	$ax + C$		$\sin x$	$-\cos x + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$		$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$		$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\, x + C$
e^x	$e^x + C$		$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctg\, x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$		$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg\, x + C$
			$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Правила нахождения первообразных

Пусть F(x) и G(x) – первообразные соответственно для функций f(x) и g(x). Тогда:

1. F (x) ± G (x) – первообразная для $f(x) \pm g(x)$;
2. k F (x) – первообразная для $k f(x)$;

3. $\frac{1}{k}F(kx+b)$– первообразная для $f(kx+b)$.

Пример 1. Выяснить, является ли функция $F(x) = x^3 - 3x + 1$ первообразной для функции $f(x) = 3(x^2 - 1)$.

Решение: $F'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, следовательно, F(x)является первообразной для функции f(x).

Пример 2. Найти все первообразные функции f(x):

а) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$

Решение: Используя таблицу и правила нахождения первообразных, получим:

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + 3\frac{x^3}{3} + 5x + C = \frac{x^5}{5} + x^3 + 5x + C$$

Ответ: $\frac{x^5}{5} + x^3 + 5x + C$

б) $f(x) = \sin(3x - 2)$

Решение: $F(x) = \frac{1}{3}(-\cos(3x-2)) + C = -\frac{1}{3}\cos(3x-2) + C$

Ответ: $-\frac{1}{3}\cos(3x-2) + C$

в) $f(x) = \frac{1}{7-3x}$

Решение: $F(x) = -\frac{1}{3}\ln|7-3x| + C$ *Ответ:* $-\frac{1}{3}\ln|7-3x| + C$

Пример 3. Для функции $f(x) = 4 - x^2$ найти первообразную, график которой проходит через точку (-3; 10).

Решение:

1) Найдем все первообразные функции f(x): $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3} + C$

2) Найдем число С, такое, чтобы график функции $y = 4x - \frac{x^3}{3} + C$ проходил через точку (-3; 10). Подставим x = – 3, y = 10 , получим:

$$10=-12-\frac{(-3)^3}{3}+C,$$

$$10=-12+9+C,$$

$$C=13.$$

Следовательно, $F(x)= 4x - \frac{x^3}{3} + 13$.

Ответ: $F(x)= 4x - \frac{x^3}{3} + 13$.

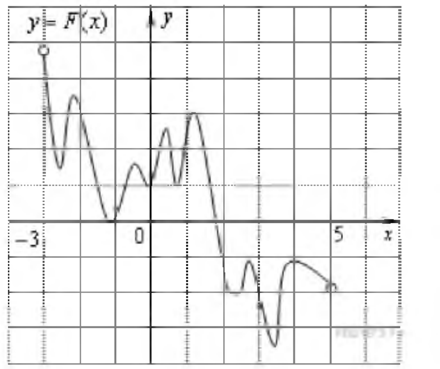
Варианты практической работы

Вариант 1

1. Является ли функция $F(x) = x^2 + 3x + 1$ первообразной для функции $f(x) = 2x + 3$ на ***R***?
2. Определите функцию, для которой $F(x) = x^2 - \sin 2x - 1$ является первообразной.
3. Найдите первообразную для функции $F(x) = 4x^3 + \cos x$.
4. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2}$.
5. Для функции $f(x) = x^2$ найдите первообразную F, принимающую заданное значение в заданной точке $F(-1) = 2$.

6. Для функции $f(x) = sin\,2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};-2\right)$.

7. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;\ 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-2;\ 4]$.



Вариант 2

1. Является ли функция $F(x) = -\frac{x^4}{4} + 5x + 2$ первообразной для функции $f(x) = -x^3 + 5$ на $\boldsymbol{R}$?

2. Определите функцию, для которой $F(x) = -\cos\frac{x}{2} - x^3 + 4$ является первообразной.

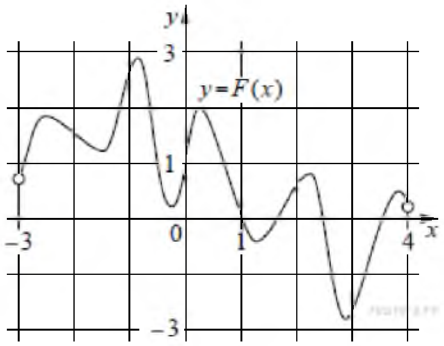
3. Найдите первообразную для функции $f(x) = x^2 - \sin x$.

4. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5. Для функции $f(x) = 2x - 2$ найдите первообразную F, график которой проходит через точку A(2;1)

6. Для функции $f(x) = (4-5x)^3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(1;\frac{1}{20}\right)$.

7. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;\ 4)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2;\ 3]$.



Практическое занятие **№ 53 -54**

«Интеграл. Теорема Ньютона-Лейбница»

Цель работы.

Формирование навыков простейшего интегрирования, применяя знания о первообразной и правилах ее вычисления, а также вычисления значений интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных и интегралов основных функций и их свойств.

План работы:

1. Повторение теоретического материала

1) Правила нахождения первообразных.
2) Формулы интегралов некоторых функций.
3) Формула Ньютона - Лейбница.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение. Множество всех первообразных $F(x)$ + C для функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$. Таким образом, по определению:

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $C = const$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ – *подынтегральным выражением*, а сам процесс отыскания множества первообразных $F(x) + C$ – ***интегрированием***. Интегрирование – это восстановление функции $F(x) + C$ по её производной $f(x)$ (обратное действие по отношению к дифференцированию).

Для нашего демонстрационного примера: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, где $C = const$

Проверка: $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2$ – исходная подынтегральная функция.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.	**6.** $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.	**7.** $\int \cos x dx = \sin x + C$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$.	**8.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.	**9.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.	**10.** $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Если F(x) - первообразная функции *f(x)*, то разность F(b) - F(a) называется ***определённым интегралом*** от функции *f(x)* на отрезке [a; b] и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$.

a – нижний предел интегрирования, b - верхний предел интегрирования,
f(x)- подынтегральная функция, x - *переменная интегрирования.*
Для вычисления определённого интеграла применяется ***формула Ньютона – Лейбница:***

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Основные свойства определенного интеграла

$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
$\int_a^b dx = b - a$	$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, c - const$
$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Пример 1. Вычислите интеграл $\int_{-2}^{2}\left(-4x + 4 + x^2\right)dx$.

Решение. Найдем множество всех первообразных для функции $-4x + 4 + x^2$:

$$F(x) = -4 \cdot \frac{x^2}{2} + 4 \cdot x + \frac{x^3}{3} + C = -2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3} + C.$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{-2}^{2} \left(-4x + 4 + x^2\right) dx = \left(-2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(-2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + \frac{2^3}{3}\right) - \left(-2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + \frac{(-2)^3}{3}\right) =$$

$$= \left(-8 + 8 + \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - 8 - \frac{8}{3}\right) = 21\frac{1}{3}.$$

Пример 2. Вычислите интеграл: $\int_{-1}^{1} \left(x^2 + 1\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} + 1\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 1\frac{1}{3} - \left(-1\frac{1}{3}\right) = 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$

Пример 3. Вычислите интеграл, используя основные свойства:

$$\int_{-2}^{4} (8 + 2x - x^2) dx \overset{(1)}{=} 8\int_{-2}^{4} dx + 2\int_{-2}^{4} x dx - \int_{-2}^{4} x^2 dx \overset{(2)}{=} 8(x)\Big|_{-2}^{4} + 2 \cdot \frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-2}^{4} - \frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^{4} \overset{(3)}{=}$$

$$= 8(4 - (-2)) + (4^2 - (-2)^2) - \frac{1}{3}(4^3 - (-2)^3) = 8 \cdot 6 + (16 - 4) - \frac{1}{3}(64 + 8) =$$

$$= 48 + 12 - 24 = 36$$

Варианты практической работы

Вариант 1	**Вариант 2**
1. Вычислите интегралы:	
1) $\int_{-\frac{2}{3}}^{1} x^3 dx$; 2) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^3} dx$; 3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$; 4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$; 6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx$; 7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} (1 + \cos 2x) dx$; 8) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\, dx$; 9) $\int_{1}^{2} \left(2x + 3x^2\right) dx$; 10) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2}$; 11) $\int_{2}^{7} \frac{4}{\sqrt{x + 2}} dx$; 12) $\int_{4}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	1) $\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} x^4 dx$; 2) $\int_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 5) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin\frac{x}{3} dx$; 6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{7}{\cos^2 3x} dx$; 7) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x + 5}}$; 8) $\int_{-2}^{0} \left(3x^2 + 1\right) dx$; 9) $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\, dx$; 10) $\int_{-2}^{0} \left(9x^2 - 4x\right) dx$; 11) $\int_{1}^{0} \frac{dx}{x}$; 12) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx$
2. Докажите справедливость равенства:	
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_{0}^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$	$\int_{0}^{1} (2x + 1) dx = \int_{0}^{2} \left(x^3 - 1\right) dx$

Практическое занятие **№ 7**

«Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей»

Цель работы.

Формирование умения применять понятие определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы первообразных и интегралов некоторых функций, таблица свойств определенного интеграла.

1. Повторение теоретического материала

1) Основные правила вычисления интегралов.

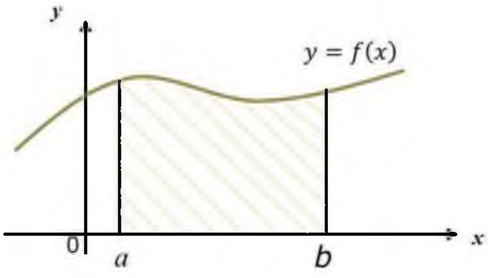
2) Определение криволинейной трапеции.
3) Формула Ньютона - Лейбница.
4) Вычисление площади фигуры с помощью определенного интеграла.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение. **Криволинейной трапецией** называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке $[a;b]$ знака функции $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$.
Площадь S криволинейной трапеции находится по формуле:

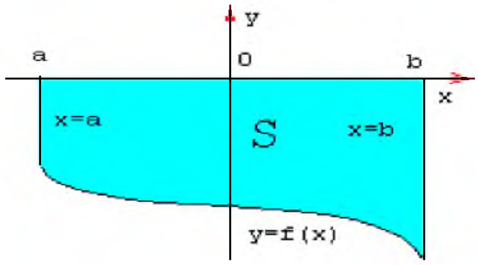
$$S=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$



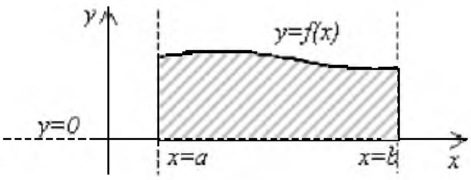
Алгоритм нахождения площади криволинейной трапеции

1. Построить графики линий.
2. Определить криволинейную трапецию.
3. Выделить функцию f, ограничивающую трапецию.
4. Определить отрезок $[a;b]$ оси Ox.
5. Найти одну из первообразных функции f.
6. Используя формулу S=F(b)-F(a), вычислить площадь.

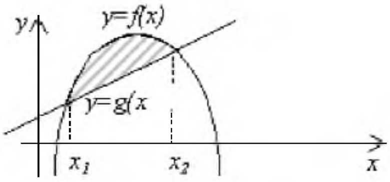
Возможен следующий случай, когда $f(x) < 0$ на [a,b]



Тогда $S=\int_a^b -f(x)\,dx$

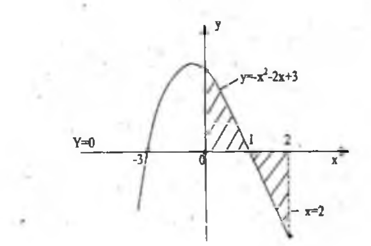


Площадь фигуры, ограниченной линиями: *x=a; x=b; y=0 и y=f(x)*
$S=\int_a^b f(x)dx$



Площадь фигуры, ограниченной линиями: *y=f(x) и y=g(x).*
Найти точки пересечения *x_1 и x_2* **из условия:** *f(x)=g(x)*
$S=\int_{x_1}^{x_2}(f(x)-g(x))dx$

Пример 1: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2-2x+3$, осями координат и прямой *x=2.*
Решение: Построим данные линии



Найдем точки пересечения графика функции с осью Ох: $y=-x^2-2x+3$, $-x^2-2x+3=0$,

$x_1=1, \quad x_2=-3$

$$s=-\frac{1}{3}-1+3-(-\frac{8}{3}-4+6)+(-\frac{1}{3}-1+3)=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{12}{3}=4(кв.ед.)$$

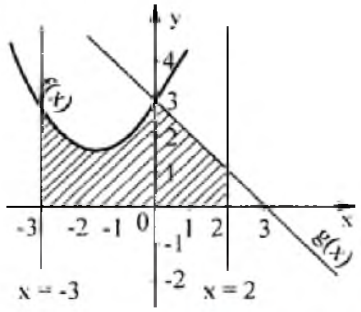
Пример 2: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями *f(x)=0.5x²+2x+3, g(x)=3-x, x=-3, x=2.*

Строим параболу *f(x)=0.5x²+2x+3*

Ветви параболы направлены вверх. Вершина находиться в точке (2;1)

Точка пересечения с осью ординат (0;3). Чертим параболу с помощью лекала (шаблона) параболы *y=0.5x²*.

Прямую *g(x)=3-x* строим по двум точкам (2;1) и (0;3).



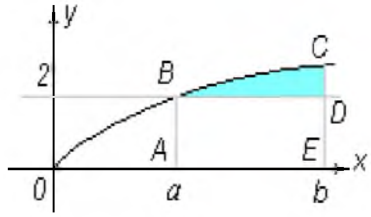
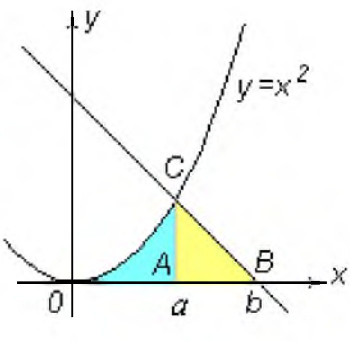
$$S=\int_{-3}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} g(x)dx=\int_{-3}^{0}(0.5x^2+2x+3)dx+\int_{0}^{2}(3-x)dx==\left(\frac{x^3}{6}+x^2+3x\right)\Big|_{-3}^{0}+\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2}=$$

$$=\frac{9}{2}-9+9+6-2=8{,}5$$

Обучающая таблица

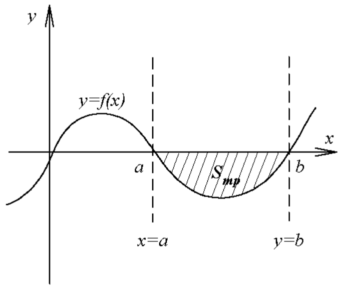
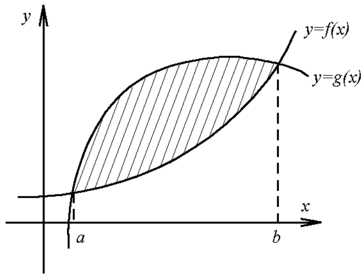
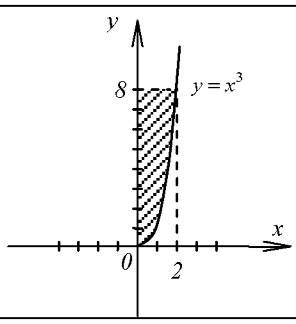
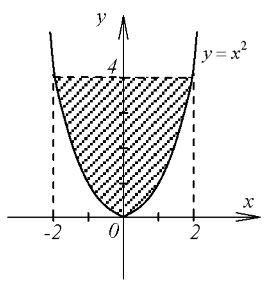
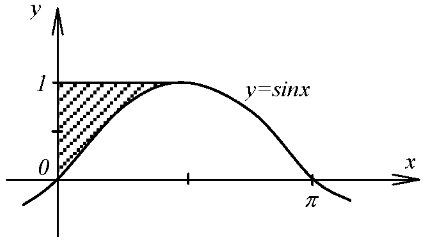
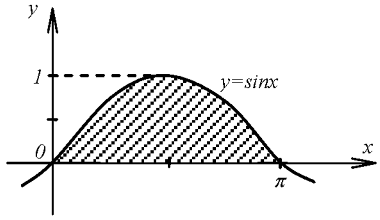
Задание. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

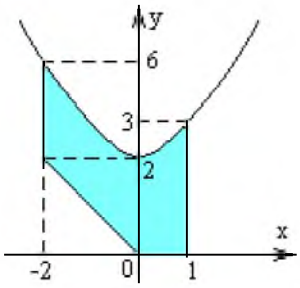
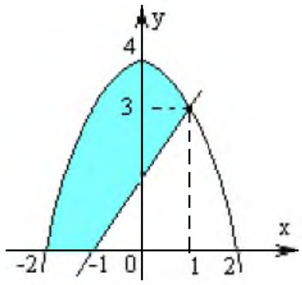
а) $y=\sqrt{x},\ y=2,\ x=9$; б) $y=x^2,\ y=2-x,\ y=0$.

№ шага	План вычисления площади криволинейной трапеции	Применение плана	
		а) $y=\sqrt{x},\ y=2,\ x=9$	б) $y=x^2,\ y=2-x,\ y=0$
1	Строим заданные линии и штриховкой отмечаем фигуру, площадь которой надо найти. Установим, является ли эта фигура криволинейной трапецией		

2	Записываем формулу для вычисления площади искомой фигуры	$S=S_{ABCDE}-S_{ABDE}=$ $=\int\limits_a^b \sqrt{x}dx-\int\limits_a^b 2dx$	$S=S_{OAC}+S_{ACB}=$ $=\int\limits_0^a x^2dx+\int\limits_a^b (2-x)dx$
3	Находим пределы интегрирования	$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=2; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$, $a=x_A=4,\ b=x_B=9$	$\begin{cases} y=x^2, \\ y=2-x; \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=-2;1$
4	Вычисляем искомую площадь по формуле (*)	$S=\int\limits_4^9 \sqrt{x}dx-\int\limits_4^9 2dx=\left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right\rvert_4^9-$ $-\left.2x\right\rvert_4^9=\frac{2}{3}(27-8)-2(9-4)=$ $=\frac{8}{3}$, $S=2\frac{2}{3}$ (кв.ед.)	$S=\int\limits_0^1 x^2dx+\int\limits_1^2 (2-x)dx=$ $=\left.\frac{x^3}{3}\right\rvert_0^1+\left.\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right\rvert_1^2=\frac{1}{3}+$ $+\left(4-\frac{4}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$, $S=\frac{5}{6}$ (кв.ед.)

Варианты практической работы

Вариант 1	**Вариант 2**
1. Записать формулы для вычисления данных криволинейных трапеций:	
1. 	1. 
2. 	2. 
3. 	3. 
2. *Выберите правильный вариант ответа.* Площадь фигуры, изображенной на рисунке, вычисляется по формуле:	

<table>
<tr>
<td>а) $S=\int\limits_{-2}^{2}\left(x^2-2\right)dx-2$
б) $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2+2\right)dx+2$
в) $S=\int\limits_{-2}^{1}\left(x^2+2\right)dx-2$

</td>
<td>а) $S=\int\limits_{-2}^{1}\left(x^2+4\right)dx-3$
б) $S=\int\limits_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx+3$
в) $S=\int\limits_{-2}^{1}\left(4-x^2\right)dx-3$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:</td>
</tr>
<tr>
<td>1) $y=x^2$, $y=0$, $x=4$;
2) $y=x^3+2$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;
3) $y=\sin x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$;
4) $y=x^2-3x+4,\quad y=x+1$</td>
<td>1) $y=x^2$, $y=0$, $x=-3$;
2) $y=x^3$, $y=0$, $x-3$, $x=1$;
3) $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$.
4) $y=0{,}5x^2-2x+3,\quad y=7-x$</td>
</tr>
</table>

Практическое занятие **№ 55 -56**

«Вычисление вероятностей, свойства вероятностей»

Цель работы.

Формирование умения применять формулы вычисления классической вероятности, теоремы сложения и умножения вероятностей для решения задач.

Оборудование: инструкционно-технологические карты.

1. Повторение теоретического материала

1) Событие, вероятность события.
2) Сложение и умножение вероятностей.
3) Понятие о независимости событий.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Классическое определение вероятности

Основным понятием теории вероятностей является понятие случайного события.

Событие – это любое явление, которое происходит или не происходит или результат испытаний, наблюдений и явлений. События обозначают заглавными латинскими буквами А, В, С..

Случайным событием называется событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти или не произойти.

Например, выпадение шестерки при подбрасывании игральной кости, попадание в некоторый объект или промах при стрельбе по этому объекту из данного орудия является случайным событием.

Событие называется ***достоверным***, если в результате испытания оно обязательно происходит. ***Невозможным*** называется событие, которое в результате испытания произойти не может.

Случайные события называются ***несовместными*** в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Случайные события образуют полную группу, если при каждом испытании может появиться любое из них и не может появиться какое-либо иное событие, несовместное с ними.

Рассмотрим полную группу равновозможных несовместных случайных событий. Такие события будем называть исходами. Исход называется благоприятствующим появлению события А, если появление этого события влечет за собой появление события А.

Долю успеха того или иного события называют вероятностью этого события и обозначают Р(А).

Определение. Вероятность любого события определяется как отношение числа m благоприятных для события А элементарных исходов к общему числу элементарных исходов n.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству $0 \le P(A) \le 1$.

Пример 1. Найти вероятность появления при одном бросании игральной кости числа очков, большего 4.

Решение: А – « появление числа очков, большего 4» $n = 6$ - число всех исходов, $m = 2$ – благоприятствующих событию А (5, 6) $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Ответ: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$

Пример 2. Некто, перетасовывая колоду из 36 карт, извлекает оттуда случайным образом одну карту. Какова вероятность того, что это будет туз?

Решение: Тузов всего 4. Это количество благоприятных исходов. Всего карт 36 - это количество всех исходов испытания. Искомая вероятность равна 4/36 = 1/9

Пример 3. В конверте среди 25 карточек находится разыскиваемая карточка. Из конверта наудачу извлечено 6 карточек. Какова вероятность, что среди них окажется нужная карточка?

Решение: Извлечь 6 карточек из 25 можно C^6_{25} способами. Это количество всех исходов. Подсчитаем количество благоприятных исходов. Если нужная карточка уже есть в наборе, то остальные пять карточек из 24 можно выбрать C^5_{24} способами.

$$P(A) = \frac{C^5_{24}}{C^6_{25}} = \frac{\frac{24!}{5!\,19!}}{\frac{25!}{6!\,19!}} = \frac{24!\,6!}{5!\,25!} = \frac{6}{25} = 0,24$$

Вычисление вероятностей с помощью формул комбинаторики

Пример 4. В партии из $N = 10$ деталей имеется $L = 7$ стандартных.

Наудачу отобраны $k = 6$ деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно $r = 4$ стандартных.

Решение: Число n всех возможных элементарных исходов выбора равно числу способов, которыми можно извлечь k деталей из N деталей, т.е. $n = C^k_N$ – числу сочетаний из N элементов по k.

$$n = C^k_N = C^6_{10} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210$$

Подсчитаем число исходов, составляющих интересующее нас событие A – (среди k деталей ровно r стандартных). Из k стандартных деталей взять r стандартных деталей можно C^r_k способами, при этом остальные $k - r$ деталей должны быть нестандартными; взять их из $N - L$ нестандартных деталей можно C^{k-r}_{N-L} способами. Число m всех благоприятствующих A исходов равно произведению $m = C^r_k \cdot C^{k-r}_{N-L}$.

$$m = C^r_k \cdot C^{k-r}_{N-L} = C^4_7 \cdot C^2_3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1} = 105.$$

Вероятность события A равна отношению m – числа исходов, благоприятствующих событию A, к n – числу всех возможных элементарных исходов

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_k^r \cdot C_{N-L}^{k-r}}{C_N^k} \quad \frac{105}{210} = 0{,}5.$

Определение. Суммой (объединением) двух событий A и B (обозначается $A+B$, *A или B*) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т.е. A или B, или оба одновременно.

Определение. Произведением (пересечением) двух событий A и B (обозначается $A \times B$, *A и B*) называется такое событие, которое заключается в том, что происходят оба события A и B вместе.

Пример 6. В первом ящике 1 белый и 5 черных шаров, во втором 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – черный.

Решение. Обозначим события: A – вынули белый шар из первого ящика, $P(A)=\frac{1}{6}$

$\bar{A}$ - вынули черный шар из первого ящика, $P(\bar{A})=\frac{5}{6}$

B – белый шар из второго ящика, $P(B)=\frac{2}{3}$

$\bar{B}$ - черный шар из второго ящика, $P(\bar{B})=\frac{1}{3}$.

Нам нужно, чтобы произошло одно из событий $A\bar{B}$ или $\bar{A}B$. По теореме об умножении вероятностей:

$$P(A\bar{B}) = \frac{1}{18} \qquad P(\bar{A}B) = \frac{10}{18}$$

Тогда искомая вероятность по теореме сложения будет $P = P(A\bar{B} + \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = \frac{11}{18}$

Пример 7. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая карта.

Решение. Пусть событие A означает «среди четырех вынутых карт есть хотя бы одна бубновая карта». Тогда $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Событие $\bar{A}$ означает, что все четыре карты не бубновой масти. Вероятность того, что случайно взятая из колоды карта не бубновая - $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$ и, тогда $P(\bar{A}) = \left(\frac{3}{4}\right)^3$ $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3$

Пример 8. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания в мишень при одном выстреле.

Если обозначить p – вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле, то вероятность промаха при одном выстреле, очевидно, равна $(1 - p)$.

Вероятность трех промахов из трех выстрелов равна $(1 - p)^3$.

Эта вероятность равна 1 – 0,875 = 0,125, т.е. в цель не попадают ни одного раза.

Получаем: $(1-p)^3 = 0{,}125; \quad 1 - p = 0{,}5; \quad p = 0{,}5.$

Пример 9. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Решение. Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости (событие A) равна $\frac{1}{6}$.

Вероятность того, что не выпадет 6 очков (событие $\bar{A}$) - $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что при броске трех костей не выпадет ни разу 6 очков равна $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков, равна $1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$.

Пример 10. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$.

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16$;
- для второго стрелка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$;
- для третьего стрелка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$;

Искомая вероятность равна:

$$p=\frac{1}{3}p_1^2+\frac{1}{3}p_2^2+\frac{1}{3}p_3^3=\frac{1}{3}(0{,}16+0{,}36+0{,}64)=\frac{29}{75}$$

Пример 11. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках равны 0,6; 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится 1) только в одном справочнике; 2) только в двух справочниках; 3) во всех трех справочниках.

Решение. A – формула содержится в первом справочнике;

B – формула содержится во втором справочнике;

C – формула содержится в третьем справочнике.

Воспользуемся теоремами сложения и умножения вероятностей.

1. $$P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)=$$
$$=0,6\cdot 0,3\cdot 0,2+0,4\cdot 0,7\cdot 0,2+0,4\cdot 0,3\cdot 0,8=0,188$$

2. $$P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)=0,6\cdot 0,7\cdot 0,2+0,6\cdot 0,3\cdot 0,8+0,4\cdot 0,7\cdot 0,8=0,452.$$

3. $$P\left(ABC\right)=0,6\cdot 0,7\cdot 0,8=0,336$$

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Из 100 изготовленных пальто оказалось 7 третьего сорта, а остальные пальто первого и второго сорта. Какова вероятность, что пять отобранных пальто будут первого или второго сорта.
2. Из урны, в которой 30 шаров белых и 4 красных, наудачу вынимаются 3 шара. Найти вероятность того, что среди них есть хотя бы один красный шар.
3. Из полного набора костей домино наугад берут 3 кости. Какова вероятность того, что хотя бы две из них дубли?
4. В урне 6 белых и 5 красных шаров. Наугад последовательно без возврата вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара красные.
5. Партия из 100 изделий содержит 40 изделий 1–го сорта, а остальные второго сорта. Наудачу берут 4 изделия, найти вероятность того, что все они будут одного сорта.
6. Трое охотников одновременно выстрелили в зайца. Найти вероятность того, что заяц будет убит, если каждый из охотников убивает зайца с вероятностью 0,5; 0,7 и 0,9 соответственно.
7. В электрической цепи 3 элемента, которые выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями 0,3; 0,2 и 0,1. Определить вероятность разрыва цепи при параллельном соединении элементов.

8. В пирамиде 10 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,85; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

Вариант 2

1. Студент знает 30 из 40 вопросов программы. Каждый билет содержит два вопроса программы. Найти вероятность того, что студент знает оба вопроса билета.
2. В партии из 10 приборов 8 не имеют дефекта. Найти вероятность того, что из двух наудачу взятых приборов хотя бы один без дефекта.
3. Открываются одна за другой карты колоды из 36 штук. Какова вероятность того, что первой картой пиковой масти окажется пятая карта?
4. Среди 17 студентов группы, из которых восемь девушек, разыгрывается семь билетов, причем каждый может выиграть, только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся четыре девушки?
5. Найти вероятность того, что в 4-х значном номере наудачу взятой машины: а) все цифры различны, б) все цифры одинаковы.
6. Два студента ищут нужную книгу в магазинах. Вероятность того, что книга будет найдена первым студентом, равна 0,6, а вторым - 0,7. Найти вероятность того, что только один студент найдет книгу.
7. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком 0,7, а вторым равна 0,6. Найти вероятность того, что а) мишень будет поражена; б) только одно попадание в цель.
8. В пирамиде 25 винтовок, 8 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,9; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,65. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

Практическое занятие № 57 -58
«Решение задач на расчёт количества выборок»

Цель работы.

Формирование умения решения задач на расчет выборок, с применением элементов и формул комбинаторики

Оборудование: инструкционно-технологические карты.

1. Повторение теоретического материала

1) Перестановки. Размещения. Сочетания.
2) Основные типы комбинаторных задач.
3) Среднее арифметическое, размах, мода, медиана.
4) Относительная частота случайного события.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Перестановками называются такое расположение элементов, которые отличаются только порядком расположения элементов, но не самими элементами.

$P_n = n!$ n! = 1 * 2 * 3 * … * n.

Размещение из n элементов по k – упорядоченная выборка, состоящая из k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Сочетаниями из n элементов по m называются неупорядоченные выборки.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 1. Сколькими способами можно расставить 15 томов на книжной полке, если выбирать их из имеющихся в наличии внешне неразличимых 30-ти книг?

Решение. Мы решаем эту задачу в контексте работы дизайнера интерьеров, поэтому порядок следования на полке 15-ти выбранных внешне одинаковых книг не имеет значения. Нужно определить общее число сочетаний из 30 элементов по 15 по формуле

C_n^m = 30!/(30 − 15)!/15! = 155117520.

Ответ: 155117520.

Пример 2. В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

Решение.

В данной задаче мы не просто выбираем фотографии, а размещаем их на определенных страницах газеты, причем каждая страница газеты должна содержать не более одной фотографии. Таким образом, задача сводится к классической задаче об определении числа размещений без повторений из 12 элементов по 4 элемента:

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12 = 11880.$$

Таким образом, 4 фотографии на 12 страницах можно расположить 11880 способами.

Пример 3. Сколько можно составить четырехбуквенных «слов» из букв слова «брак»?

Решение

Генеральной совокупностью являются 4 буквы слова «брак» (б, р, а, к). Число «слов» определяется перестановками этих 4 букв, т. е.

$$P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

Среднее арифметическое, размах, мода и медиана

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Найдем среднее арифметическое для чисел 5,24, 6,97, 8,56, 7,32 и 6,23.

ср. ариф. = 5,24+6,97+8,56+7,32+6,235=6,864

Размахом ряда чисел называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

Размах ряда 5,24, 6,97, 8,56, 7,32, 6,23 равен 8,56-5,24=3,32

Модой ряда чисел называется число, которое встречается в данном ряду чаще других.

Ряд чисел может иметь более одной моды, а может не иметь моды совсем.

Модой ряда 32, 26, 18, 26, 15, 21, 26 является число 26, встречается 3 раза.

В ряду чисел 5,24, 6,97, 8,56, 7,32 и 6,23 моды нет.

Ряд 1, 1, 2, 2, 3 содержит 2 моды: 1 и 2.

Медианой упорядоченного ряда чисел с нечётным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда чисел с чётным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.

Медианой произвольного ряда чисел называется медиана соответствующего упорядоченного ряда.

Медиана ряда 4, 1, 2, 3, 3, 1 равна 2,5.

Относительной частотой случайного события называется отношение числа испытаний, в которых это событие наступило, к числу всех испытаний.

Пример. Пусть дана выборка: 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 6. $x_1=2$; $x_2=3$; $x_3=4$; $x_4=5$; $x_5=6$ — варианты выборки; 2; 3; 4; 5; 6 — вариационный ряд.

Частота варианты x_1 равна 3; варианты x_2 — 5; варианты x_3 — 6; варианты x_4 — 5; варианты x_5 — 1. Относительная частота варианты x_1 равна $\frac{3}{20}=15\%$; варианты x_2 — $\frac{5}{20}=25\%$, *Пример 1.*

Рассмотрим примеры нахождения среднего арифметического чисел, а также размаха, медианы и моды ряда.

Среднее арифметическое чисел 30, 5, 23, 5, 28, 30

ср. ариф. =(30+5+23+5+28+30) : 6=$20\frac{1}{6}$

Размах ряда: 30-5=25

Моды ряда: 5 и 30

Медиана ряда: 25,5

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Вычислить: 1) P_7; 2) A_8^3; 3) C_8^5.

2. Найти среднее арифметическое, размах, моду, медиану ряда чисел:

а) 67,1; 68,2; 67,1; 70,4; 68,2; б) -4, -6, 0, -4, 0, - 6, -12.

3. Сколькими способами можно выбрать для подарка 3 предмета из 9 предметов?

4. В классе 30 человек. Сколькими способами могут быть выбраны из их состава староста и казначей?

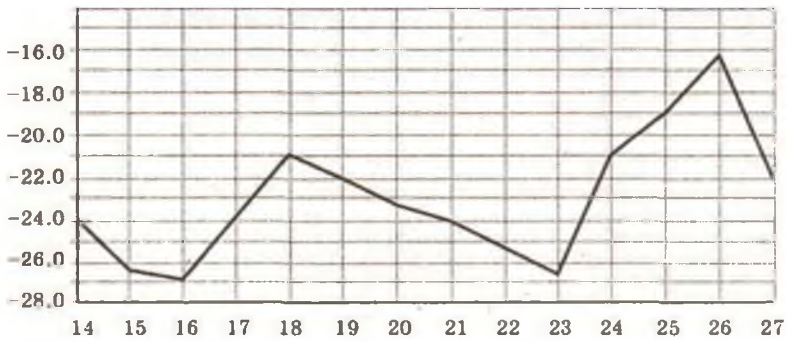
5. Сколькими способами могут разместиться пять человек вокруг круглого стола?

6. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1;2;5;8 так чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?

7. В бригаде из двадцати пяти человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

8. На рисунке изображён график среднесуточной температуры в г. Омске в период с 14 по 27 января 1974 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия.

Определите по графику, какая была средняя температура 21 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Вариант 2

1. Вычислить: 1) P_6; 2) A_8^5; 3) C_8^3

2. Найти среднее арифметическое, размах, моду, медиану ряда чисел:

а) 21; 18,5; 25,3; 18,5; 17,9; б) -2, -3, -5, - 9, 0, -2, - 3.

3. Сколькими способами можно выбрать для подарка 4 предмета из 8 предметов?

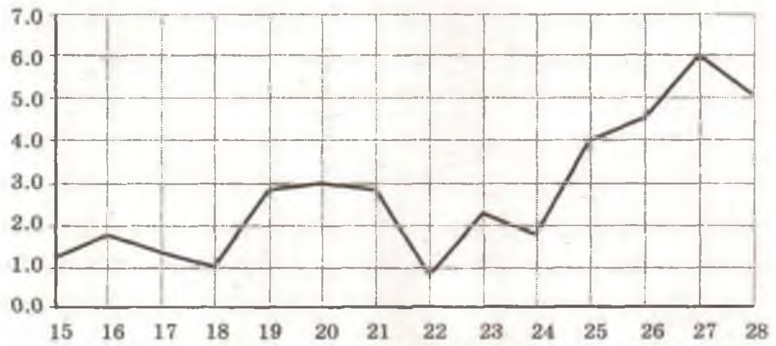
4. Имеются 3 билета на просмотр 3-х различных кинофильмов. Сколькими способами 8 друзей могут распределить между собой эти 3 билета?

5. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг?

6. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0;1;2;3;4?

7. В магазине «Филателия» продается 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?

8. На рисунке изображён график среднесуточной температуры в г. Риге в период с 15 по 28 марта 1943 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия.



Определите по графику, какой была наибольшая среднесуточная температура в период с 16 по 25 марта 1943 г. Ответ дайте в градусах Цельсия

Практическое занятие **№ 59 -60**

«Основные приемы решения рациональных и иррациональных уравнений»

Цель работы.

Обобщение и систематизация знаний и умений по решению рациональных и иррациональных уравнений

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы с формулами.

1. Повторение теоретического материала

1) Способы решения рациональных уравнений.

2) Способы решения иррациональных уравнений.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Определение. Уравнения, в которых неизвестная содержится в знаменателе дроби, называются рациональными.

При решении рациональных уравнений необходимо:

1) найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2) заменить данное уравнение целым, умножив обе части на общий знаменатель;
3) решить получившееся уравнение;
4) исключить из него те корни, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Пример 1. Решить уравнение:

$$\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3\cdot(x+1)}{7-x}$$ О.З. = (4x – 3) · (7 – x)

$$\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3\cdot(x+1)}{7-x}\Bigg|\cdot(4x-3)\cdot(7-x)$$

$$\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3\cdot(x+1)}{7-x}\Bigg|\cdot(4x-3)\cdot(7-x)$$ *Проверка:*

$$(5+2x)\cdot(7-x)=(3x+3)\cdot(4x-3)$$

$-14x^2+6x+44=0$ x= 2 4 · 2 – 3 = 5 ≠ 0 7 – 2 = 5 ≠ 0

$14x^2-6x-44=0$

$x_1=2 \quad x_2=-5{,}5$ x = - 5,5 4 · (- 5,5) – 3 = - 25 ≠ 0 7 – (- 5,5) = 7 + 5,5 = 12,5

Ответ: $x_1=2 \quad x_2=-5{,}5$

Определение. Уравнения, в которых переменная находится под знаком корня, называются иррациональными.

Для решения иррационального уравнения надо левую и правую части уравнения возвести в *n*-ую степень, равную показателю корня.

Пример 2. Решение уравнения $\sqrt{1+3x}$ = 1 – *x методом возведения в квадрат обеих частей уравнения.*

$$(\sqrt{1+3x})^2=(1-x)^2;$$

$1+3x=x^2-2x+1;$

$x^2 - 5x = 0$.

Решив это уравнение, находим корни $x_1 = 0,\ x_2 = 5$.

Проверка: если $x = 0$, то $\sqrt{1+3\cdot 0} = 1-0$, 1 = 1 – верно;

если $x = 5$, то $\sqrt{1+3\cdot 5} = 1-5$, 4 = 4 – неверно.

Ответ: x = 0.

Пример 3. Решите уравнение: $\sqrt{x+16} - x + 4 = 0$.

Решение. Уединим радикал и затем возведем обе части в квадрат

$$\left(\sqrt{x+16}\right)^2 = (x-4)^2, \quad x+16 = x^2 - 8x + 16,$$

$$x^2 - 9x = 0, \quad x_1 = 0, \ x_2 = 9.$$

Проверка показывает, что $x_1 = 0$ – посторонний корень

Ответ: 9.

Пример 4. Решите уравнение: $x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0$.

Решение. Введем новую переменную $t = \sqrt{x^2 + 3x - 6}, \ t \ge 0$.

Тогда $x^2 + 3x = t^2 + 6$ и уравнение примет вид

$t^2 + 6 - 18 + 4t = 0, \ t^2 + 4t - 12 = 0, \ t_1 = 2$ или $t_2 = -6$ - не подходит по смыслу.

Далее $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2, \ x^2 + 3x - 6 = 4, \ x^2 + 3x - 10 = 0, \ x_1 = -5, \ x_2 = 2$.

Ответ: - 5; 2.

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Решите уравнение: а) $\frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5$; б) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$

2. Решите уравнение: а) $1 - x = \sqrt{2x+1}$; б) $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$; в) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2} = 9$

Вариант 2

1. Решите уравнение: а) $\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}$ б) $\frac{x-1}{x+3} + \frac{x+1}{x-3} = \frac{2x+18}{x^2-9}$

2. Решите уравнение: а) $\sqrt{17 + 2x - 3x^2} = x + 1$; б) $x - 5 = \sqrt{x} + 1$ в) $\sqrt{x-3} - \sqrt{x-4} = 1$

Практическое занятие **№ 61 -62**

«Основные приемы решения показательных и логарифмических уравнений»

Цель работы.

Обобщение и систематизация знаний и умений по решению показательных и логарифмических уравнений.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы с формулами, таблицы графиков функций.

1. Повторение теоретического материала

1) Способы и методы решения показательных уравнений.

2) Способы и методы решения логарифмических уравнений.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

Показательные уравнения

Определение. **Показательными уравнениями** называются уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

1) Простейшие уравнения, левую и правую части которых можно привести к одному основанию, решаются так:

Пример 1. $5^x = 625 \quad \Rightarrow \quad 5^x = 5^4 \Rightarrow x = 4.$ $\quad$ *Ответ*: $x = 4$

2) Уравнения вида $2^x + 2^{x-1} - 2^{x-3} = 4$ решаются вынесением за скобки степени с наименьшим показателем.

3) Уравнения, сводящиеся к квадратному. Уравнения, вида $7^{2x} - 48 \cdot 7^x = 49$ решаются с помощью подстановки $a^x = y$.

Пример 2. Решить уравнение: $5^{2x+1} - 26 \bullet 5^x + 5 = 0$

$5^x = y$,

$5y^2 - 26y + 5 = 0$,

D = 169 – 25 = 144, $\quad y_1 = 5 \qquad\qquad y_2 = 1/5$

$5^x = 5 \quad x = 1, \qquad\qquad 5^x = 1/5 \quad x = -1$

Ответ: $x = 1$ и $x = -1$

4) Однородные показательные уравнения. При решения уравнения вида $a^x = b^x$ обе части уравнения необходимо разделить на b^x где $b^x \neq 0$

$$\frac{a^x}{b^x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Логарифмические уравнения

Определение. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма, называются **логарифмическими.**

Такие уравнения решаются с помощью определения логарифма, теорем о логарифмах и утверждения, что если положительные числа равны, то и равны их логарифмы при данном основании и обратно, если логарифмы чисел равны, то равны и соответствующие им числа.

При решении логарифмических уравнений необходимо учитывать ОДЗ. Все подлогарифмические выражения, а также основания логарифмов являются положительными и основания не равны 1. Однако можно избежать определения ОДЗ исходного уравнения, полученные решения необходимо проверить подстановкой их в данное уравнение и исключить посторонний корень. В большинстве случаев такой подход облегчает решение логарифмических уравнений.

Для решения простейшего логарифмического уравнения достаточно привести обе части к одинаковому основанию, а затем приравнять подлогарифмические выражения. Часто используется формула перехода от одного основания к другому.

$$log_2 x = 3 \Leftrightarrow log_2 x = log_2 8 \Leftrightarrow x = 8.$$

Виды логарифмических уравнений

1. Простейшие ($\log_2 x = 6$).
2. Простейшие с переменной в основании логарифма ($\log_x 27 = 3$).
3. Простейшие с переменной и в основании, и под логарифмом ($\log_x (x+2) = 2$).
4. Сводящиеся к простейшим с помощью использования свойств логарифмов ($\log_2 x + \log_x (x+2) = 3$).
5. Сводящиеся к квадратным($log^2{}_2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$).

Алгоритм решения простейших логарифмических уравнений

1.Уравнять основания логарифмов.

2.Приравнять подлогарифмические функции.

3.Выполнить проверку.

Пример 1.
$\log_2(3x-6)=\log_2(2x-3)$
Основания логарифмов равны, приравняем подлогарифмические выражения, с учетом ОДЗ:
$$\begin{cases}3x-6=2x-3\\ 3x-6>0\end{cases}$$
Найдем корень и подставим его в неравенство:
$$\begin{cases}x=3\\ 3*3-6>0,9-6>0,3>0\end{cases}$$
Ответ: $x=3$

Пример 2. $\log_2 x+\frac{4}{\log_x 2}=5$

Найдем ОДЗ: $x>0, x\neq 1$
Воспользуемся свойством логарифма: $\frac{1}{\log_x 2}=\log_2 x$

Получаем: $\log_2 x+4\log_2 x=5$

Приведем подобные: $5\log_2 x=5$; $\log_2 x=1$, Преобразуем согласно определению логарифма:
$x=2^1=2$.Ответ: x=2

Пример 3. Решить уравнение $\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$

$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3 \qquad 3=\log_2 8$

$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=\log_2 8$

$(x+1)\cdot(x+3)=8$

$x^2+4x+3=8$

$x^2+4x-5=0$

$x_1=1, \quad x_2=-5$

Проверка

$x=1 \qquad \log_2(1+1)+\log_2(1+3)=\log_2 2+\log_2 4=1+2=3$ - левая часть

3=3 $\Rightarrow$ $x=1$ – корень уравнения

$x=-5 \qquad \log_2(-5+1)+\log_2(-5+3)=\log_2(-4)+\log_2(-2)$ - левая часть не имеет смысла $\Rightarrow$

$x=-5$ не является корнем

Ответ: $x=1$

Пример 4: $2^x=3$ По определению логарифма имеем: $x=\log_2 3$

Пример 5: Решить уравнение: а) $\lg^2 x-3\lg x+2=0$,

ОДЗ уравнения есть множество $x\in(0;+\infty)$. Обозначив $\lg x=t$ (тогда $\lg^2 x=(\lg x)^2=t^2$), получим квадратное уравнение: $t^2-3t+2=0$, решения которого $t_1=1$ и $t_2=2$.
Следовательно,
$$\left[\begin{array}{l}\lg x=1,\\ \lg x=2,\end{array}\right.$$
откуда $x_1=10$ и $x_2=100$.
Оба корня входят в *ОДЗ*.

Варианты практической работы

Вариант 1

1. Решить показательные уравнения: а) $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=2$; б) $5^{x+1}-5^{x-2}=620$;
в) $9^x-7\cdot 3^x-18=0$

2. Решить логарифмические уравнения: а) $\log_5(2x-1)=\log_5 25$ б) $\lg(3x-1)-\lg(x+5)=\lg 5$

в) $lg^2 x + 2lg\, x = 8$

Вариант 2

1. Решить показательные уравнения: а) $8^{-1} \cdot 2^{3x} = 8$ б) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x+2} = 4$;

в) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

2. Решить логарифмические уравнения: а) $\lg(x^2 - 2) = \lg x$ б) $lg(2x) + lg(x+3) = lg(12x - 4)$

в) $log_3^2 x = 4 - 3log_3 x$

Практическое занятие **№ 63 -64**

«Основные приемы решения тригонометрических уравнений»

Цель работы:

Обобщение и закрепление навыков решения основных типов тригонометрических уравнений.

Оборудование: инструкционно-технологические карты, таблицы значений тригонометрических функций некоторых углов, таблицы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений, таблицы формул тригонометрии.

План выполнения работы

1. Повторение теоретического материала

1) Арксинус, арккосинус, арктангенс числа.
2) Формулы корней простейших тригонометрических уравнений.
3) Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений.
4) Типы тригонометрических уравнений и методы их решения.
5) Выполнение тренировочных упражнений.

2. Выполнение практической работы

Теоретические сведения и методические рекомендации

К простейшим тригонометрическим уравнениям сводятся все другие. Для большинства таких уравнений требуется применение различных формул и преобразование тригонометрических выражений.

Пример 1. Решите уравнение: $2sin^2 x - 5cos\, x + 1 = 0$.

Применив основное тригонометрическое тождество: $sin^2 x = 1 - cos^2 x$, получим:

$$2(1 - cos^2 x) - 5cos\, x + 1 = 0,$$

$$2 - 2cos^2 x - 5cos\, x + 1 = 0,$$

$$2cos^2 x + 5cos\, x - 3 = 0.$$

Это уравнение является **квадратным относительно** $cos\, x$ **.**

Обозначим $cos\, x = y$, тогда $2y^2 + 5y - 3 = 0$. Полученное уравнение имеет решения

$$y_1 = -3, \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Составим два простейших уравнения:

$$cos\, x = -3 \qquad \text{и} \qquad cos\, x = \frac{1}{2}.$$

Первое уравнение решений не имеет, так как $-1 \le cos\, x \le 1$. Второе уравнение имеет решение:

$x = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,$ $\qquad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

Пример 2. Решите уравнение: $3sin^2 x - 2sin\, 2x + 5sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2$.

Так как по формуле приведения $sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=cos^2 x$, а $sin 2x = 2 sin x cos x$ по формуле двойного угла, то $$3 sin^2 x - 4 sin x cos x + 5 cos^2 x - 2 = 0.$$
При помощи основного тригонометрического тождества заменим 2 на $2\left(sin^2 x + cos^2 x\right)$ и получим:

$$3 sin^2 x - 4 sin x cos x + 5 cos^2 x - 2\left(sin^2 x + cos^2 x\right) = 0,$$

откуда

$$sin^2 x - 4 sin x cos x + 3 cos^2 x = 0.$$

Это уравнение является **однородным относительно** $sin x$ **и** $cos x$**.** Разделив обе части полученного уравнения на $cos^2 x$, получим

$$tg^2 x - 4 tgx + 3 = 0.$$

Это уравнение является квадратным относительно tgx. Обозначим $tgx = y$, тогда $y^2 - 4y + 3 = 0$.

Полученное квадратное уравнение имеет корни $y_1 = 1,\ \ y_2 = 3$. Из уравнения $tgx = 1$ получаем:

$x_1 = arctg 1 + \pi n$, $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z.$

Из уравнения $tgx = 3$ получаем $\quad x_2 = arctg 3 + \pi k$, $k \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,\ \ arctg 3 + \pi k,\ k \in Z$

Пример 3. Решите уравнение: $cos 2x = cos 6x$.

Запишем данное уравнение иначе: $\quad cos 2x - cos 6x = 0$.

По формуле разности косинусов $cos x - cos y = -2 sin\frac{x+y}{2} sin\frac{x-y}{2}$ получаем:

$$2 sin 4x\, sin 2x = 0.$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому если $sin 4x = 0$, то $4x = \pi n,\ \ x_1 = \frac{\pi n}{4},\ \ n \in Z$; если $sin 2x = 0$, то $2x = \pi k,\ \ x_2 = \frac{\pi k}{2}.\ \ k \in Z$.

Можно заметить, что решения второго уравнения уже содержатся в решении первого уравнения и иначе записать ответ.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$.

Пример 4. Решите уравнение: $sin 3x = 2 cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

В правой части применим формулу приведения: $\quad sin 3x = 2 sin x$,

$$sin 3x - sin x - sin x = 0,$$
$$\left(sin 3x - sin x\right) - sin x = 0.$$

Применим формулу разности синусов $sin x - sin y = 2 sin\frac{x-y}{2} cos\frac{x+y}{2}$, тогда

$$2 sin x\, cos 2x - sin x = 0.$$

Вынесем за скобки общий множитель:

$$sin x\left(2 cos 2x - 1\right) = 0.$$

Если $sin x = 0$, то $x_1 = \pi n$; если $2 cos 2x - 1 = 0$, то $2 cos 2x = 1,\ cos 2x = \frac{1}{2}$, значит,

$2x = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi k,\ \ 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$.

Ответ: $\pi n,\ n \in Z;\ \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Варианты практической работы

Вариант 1	**Вариант 2**
1. Решить уравнение, сделав подстановку	
1) $5tg^2x - 13tgx - 6 = 0$ 2) $2sin^2 x - 5cos\,x + 1 = 0$ 3) $2\mathrm{tg}\,x + 2\mathrm{ctg}\,x = 5$	1) $2cos^2 x - 3cos\,x - 2 = 0$ 2) $2cos^2 x + 4sin^2 x = 3$ 3) $3\mathrm{tg}\,x - 3\mathrm{ctg}\,x = 8$
2. Решить уравнение методом разложения на множители	
1) $5\sin x + 3\sin 2x = 0$ 2) $\sin 7x - \sin x = 0$	1) $7\cos x - 4\sin 2x = 0$ 2) $\cos 5x + \cos x = 0$
3. Решите однородное уравнение	
1) $2sin^2 x - 5sin\,x\,cos\,x + 3cos^2 x = 0$	1) $3sin^2 x - 7sin\,x\,cos\,x + 2cos^2 x = 0$

Учебно – методическое обеспечение

1. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб.для студ. учреждений сред. проф. образования / М.И. Башмаков. — М., 2016.
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10-11. – М., 2012.
3. Смирнова И.М. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2010.
4. Шарыгин И.Ф. Геометрия (базовый уровень) 10—11 кл. М:–2012

Интернет-ресурсы:

1. http://www.exponenta.ru/educat/links/l_educ.asp#0 – Полезные ссылки на **сайты математической и образовательной направленности:** Учебные материалы, тесты
2. http://www.fxyz.ru/ - Интерактивный справочник формул и сведения по алгебре, тригонометрии, геометрии.
3. http://maths.yfa1.ru - Справочник содержит материал по математике (арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия).
4. allmatematika.ru - Основные формулы по алгебре и геометрии: тождественные преобразования, прогрессии, производная, стереометрия и проч.